行政院國家科學委員會專題研究計畫　成果報告

以電磁場數值方法分析光波導與光子晶體元件的交互作用

計畫類別：個別型計畫
計畫編號：NSC92-2215-E-216-002-
執行期間：92 年 08 月 01 日至 93 年 07 月 31 日
執行單位：中華大學電機工程學系

計畫主持人：吳俊傑

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中　華　民　國 93 年 12 月 7 日

以電磁場數值方法分析光波導與光子晶體元件的交互作用

吳俊傑
中華大學電機工程研究所
新竹市香山區東香里五福路二段 707 號
電話:03-5186363　傳真:03-5186436
Email: jjwu@chu.edu.tw

摘要

本論文主要的目的是採用模式展開法組合傳遞矩陣的技術研究二維光子晶體帶隙結構. 最近光子晶體結構廣泛地應用導波元件的設計, 因此我們著手利用一種簡單, 有效和嚴格的理論模型去研究從變化半徑的光子晶體結構的電磁傳播特性. 我們採用疊積木的方式將光子晶體結構分成許多平面光柵, 光柵內的電磁場都可使用嚴格的方法加以分析, 接著以等效網路組合它們, 分析二維光子晶體的導波特性. 我們的方法已經用於一般的二維的光子晶體結構, 能夠快速收斂並與平面波展開法獲得非常一致的結果. 在此, 我們用這一個方處理更廣泛的二維光子晶體結構, 以研究電磁場的散射與導波特性.

關鍵詞: 等效網路法, 帶隙, 光子晶體

ABSTRACT

An analytic modal expansion method combined with a transfer-matrix technique is developed to investigate band diagram of two-dimensional photonic crystals. In recent years, the photonic crystal has been widely used in the guided wave devices. It is the aim of this paper to present a simple, efficient, and rigorous theoretical model to investigate the propagation behavior of EM waves through this important class of variation radius photonic crystal structure. In our approach, the building-block approach first breaks the cross-sectional geometry of two-dimensional photonic crystal into constituent parts (dielectric grating), analyzes each part rigorously, and then combines them into a network analysis of the complete photonic crystal structure. Fast convergence of numerical result two-dimensional photonic crystal has been obtained and excellent agreement of theoretical results with plane wave expansion method achieved, indicating the effectiveness and efficiency of the developed analytical modal expansion method. We also attempt to extent this method the analyzed EM behavior of another two-dimensional photonic crystal structure.

Keywords: Equivalent Network Method, Band Gap, Photonic Crystal

1. 前言

自從 1987 年 Eli. Yablonovitch [1]和 J. D. Joannopoulos[2]提出光子帶隙（Photonic bandgaps）的概念，相對於電子在半導體晶體的特性，使具有特性波長的光子無法在此晶體中傳播[3]，形成一種類似光子的絕緣體。光子晶體是一種折射率空間週期變化的新型光學微結構材料。根據光子晶體的排列方法的不同，會有不同的穿透與反射的效應。依排列週期、空間結構和介質的介電常數來控制。

在本篇論文裡我們將先簡要地回顧光柵的電磁理論，隨後將此一理論用於分析光子晶體結構。

2. 光子晶體的基本原理

光子晶體是一類材料能引起稱為光子帶隙的頻率範圍，在其中電磁波不能沿任何方向傳播，因此這類材料能夠提供以類似於半導體元件中的電子的方式來控制操縱光子能流。它可分為線性光子晶體與非線性光子晶體兩大類，前者是線性折射率在空間周期性變化的介電微結構，後者是線性折射率在空間是不變的，而非線性極化率在空間呈周期性變化的介電微結構。它按照空間分佈的週期性可以分為：一維、二維和三維的人造週期性介電結構。

其中一維光子晶體就是我們通常所說的光學多層膜，多層介質週期性地排列形成一維光子帶隙，使某些頻率範圍的光子無法穿越，產生高效率的反射。它不像一般的天然晶體，光子晶體是不存在於自然界的，它必須藉由人為製造，及在長晶的過程以一固定的晶格常數(lattice constant)，週期性的成長不同折射率(或介電常數)之介電值，這與傳統晶體的週期性位能并不太一樣，傳統晶體是以原子為週期性位能；光子晶體則是以不同介電值為週期性位能。週期性成長的方向數目則決定了光子晶體的維數。

光子晶體的理論研究始於上世紀 80 年代末期。雖然 1987 年 Yablonovitch 和 John 就提出了光子晶體的概念，但直到 1989 年，Yablonovitch 和 Gmitter 首次在實驗上證實三維光子能帶結構的存在，物理界才開始大舉投入這方面的理論研究。許多在微波波段的光子晶體實驗，三維金屬光子晶體可以作為效果極好的反射元件和濾波器。最近有報導在紅外波段運作的三維光子晶體以半導體製程以層狀方式堆疊製作出來。即使是在微波和遠紅外波段，這些光子晶體的吸收與色散現像非常的明顯。

3. 理論基礎

在這裡我們簡要地回顧光柵電磁分析，隨後我們將此一方法使用疊積木的技巧用於分析光子晶體的帶隙結構。圖 1 顯示二維光子晶體結構及其等效網路, 我們使用疊積木法, 我們發現每一層部是光柵或平板波導, 極易使用文獻[4] 所提供的數學技巧來分析二維光子晶體結構. 我們首先依照文獻[4]內的圖 2 描述直角座標系統，入射平面波的傳播向量具有，一般而言，有三個分量，與入射角的關係為

$$k_x = k\sin\theta\cos\phi \qquad (1a)$$

$$k_y = k\sin\theta\sin\phi \qquad (1b)$$

$$k_z = k\cos\theta \qquad (1c)$$

這裡 k 是平面波在入射區域的傳播常數。然而結構中每一個區域中空間諧波的振幅可以由邊界值問題的解決定如下，第 n 個空間諧波沿 x 方向的傳播常數與入射平面波的關係為

$$k_{xn} = k_x + \frac{2n\pi}{d}$$
$$n = \ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \qquad (2)$$

對於均勻層結構，我們取 z 軸為縱向。因此，第 n 個空間諧波的橫向傳播向量為 k_{xn} 和 k_y，並且已知為結構中每一層的不變量。因此，傳播向量的 z 分量 k_{zn}，對於 TE 和 TM 模式兩者在均勻介質中的第 n 個空間諧波，藉由

$$k_{zn} = (k^2 - k_{xn}^2 - k_y^2)^{1/2} \quad \text{for}$$
$$n = \ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \qquad (3)$$
$$k^2 = k_0^2 \varepsilon \qquad (4)$$

在光柵層兩個表面上每一個空間諧波的 TE 場和 TM 場向量的關係為

$$\vec{H}_{tn}(t_g) = -\tilde{Y}_n^{(up)} \bullet [\hat{z}_0 \times \vec{E}_{tn}(t_g)] \qquad (5a)$$

$$\vec{H}_{tn}(0) = \tilde{Y}_n^{(dn)} \bullet [\hat{z}_0 \times \vec{E}_{tn}(0)] \qquad (5b)$$

這裡 $\tilde{Y}_n^{(up)}$ 和 $\tilde{Y}_n^{(dn)}$ 分別是在光柵的上表面($z=0$)往上看和在較低的表面($z=t_g$)往下看的第 n 個空間諧波輸入導納矩陣。這裡 Y_{fn} 和 Y_{sn} 分別為薄膜和基板區中第 n 個空間諧波的特性導納。它們定義為

$$Y_{rn} = \begin{cases} \dfrac{k_{zn}^{(r)}}{\omega\mu}, & \text{TE–Í Ž®} \\ \dfrac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}{k_{zn}^{(r)}}, & \text{TM–Í Ž®} \end{cases} \qquad (6)$$

這裡上標和下標的 r 可以表示 a 、 f 或 s，分別代表空氣、薄膜或基板。這裡 κ 稱為本徵指數，從文獻[1]內得知

$$\cos\kappa d = \cos\kappa_1 d_1 \cos\kappa_2 d_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{Y_1}{Y_2} + \frac{Y_2}{Y_1}\right)\sin\kappa_1 d_1 \sin\kappa_2 d_2 \qquad (7)$$

稱為週期介質的色散關係。每一個模式有自己的本徵座標系統，並且每一個本徵座標系統與結構座標系統的關聯是繞 x 軸旋轉。為了以公式化表述邊界值問題，每一個模式的場將由本徵座標系統轉換成結構座標系統。定義了兩個座標系統間的轉換；用矩陣的形式，可以寫成

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{k_t}\begin{bmatrix} k_z & k_y \\ -k_y & k_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \qquad (8)$$

這裡 k_t 是具有結構座標系統分量 k_y 和 k_z 的橫向傳播向量 $\vec{k}_t$，的大小。通常，為了完整地描述 TE 或 TM 模式在結構座標系統的特性，需要五個場分量，用以替代在本徵座標系統中的三個分量。要注意的是，我們已經用引號來表示偏極化，嚴格地說，偏極化只有相對於所有本徵座標系統和結構座標系統公共的 x 軸為真。其中我們定義如下的簡寫符號

$$u_y = v_z = k_z / k_t \qquad (9a)$$

$$u_z = v_y = k_y / k_t \qquad (9b)$$

要注意在垂直或主平面入射的特例，每一個本徵座標系統 (xuv) 和結構座標系統 (xyz) 重合，因此只要固定極化的本徵場就足以求解邊界值問題。這樣就跟以前一樣允許對 TE 或 TM 模式分別作較為簡單的處理。多層結構的效應是由二階輸入導納矩陣來描述其特徵，以致於光柵層兩個表面對於每一個空間諧波的邊界條件是由方程式(5)的線性關係是來規定。

為了準備做為一個邊界值問題的光柵波導的公式，我們展開方程式(10)的場解為傅立葉級數，它稱為週期介質的 Floquet 模式函數。對於分片均勻的介質，在方程式(10)中場分量的傅立葉振幅很容易從一個單包中的嚴格場解而決定

$$\begin{cases} E_u = -V(x) = -\sum V_n \exp(-j\kappa_{xn}x) \\ H_v = -I(x) = -\sum G_n \exp(-j\kappa_{xn}x) \\ H_x = \dfrac{\kappa_t}{\omega\mu_0}V(x) = \sum I_n \exp(-j\kappa_{xn}x) \end{cases} \quad \text{TE 模式} \quad (10a)$$

$$\begin{cases} H_u = I(x) = \sum I_n \exp(-j\kappa_{xn}x) \\ E_v = -V(x) = -\sum G_n \exp(-j\kappa_{xn}x) \\ H_x = \dfrac{\kappa_t}{\omega\varepsilon_0\varepsilon(x)}I(x) = \sum V_n \exp(-j\kappa_{xn}x) \end{cases} \quad \text{TM 模式} \quad (10b)$$

這裡我們使用了傳播常數 k_y 處處連續的事實並且沿 z 方向的傳播常數可以決定如下

$$k'_{zm} = [(k'_{tm})^2 - k_y^2]^{1/2} \quad \text{TE 模式} \qquad (11a)$$

$$k''_{zm} = [(k''_{tm})^2 - k_y^2]^{1/2} \quad \text{TM 模式} \qquad (11b)$$

要注意的是對於無損耗光柵 k'_{zm} 和 k''_{zm} 可以是實數也可以是虛數。物理上，假如光柵是沒有損耗的，意味那個模式可以傳播或瞬逝。

在由 $z=0$ 和 $z=t_g$ 兩個表面所限制的光柵區，電磁場相對於 z 軸同時包含向前和向後傳播的波。邊界值問題有關的分量，第 n 個空間諧波的通解為

$$E_{xn}^{(g)} = \sum_m V''_{mn}[c''_m \exp(-jk''_{zm}z) + d''_m \exp(jk''_{zm}z)]$$

$$+\sum_m G''_{mn}v''_{ym}[c''_m \exp(-jk''_{zm}z) + d''_m \exp(jk''_{zm}z)] \qquad (12a)$$

$$-E_{yn}^{(g)} = \sum_m V'_{mn}u'_{ym}[c'_m \exp(-jk''_{zm}z)$$

$$+ d'_m \exp(jk'_{zm}z)] \qquad (12b)$$

$$H_{xn}^{(g)}(z) = \sum_m I'_{mn}[c'_m \exp(-jk'_{zm}z) - d'_m \exp(jk'_{zm}z)] \qquad (12c)$$

$$H_{yn}^{(g)} = -\sum_m G'_{mn}v'_{ym}[c'_m \exp(-jk'_{zm}z) - d'_m \exp(jk'_{zm}z)]$$

$$+\sum_m I''_{mn}u''_{ym}[c''_m \exp(-jk''_{zm}z) - d''_m \exp(jk''_{zm}z)] \qquad (12d)$$

這裡除了模式的振幅 c 和 d，必須由邊界條件來決定外，其餘均為已知。為了簡潔起見，方程式可以寫成矩陣的形式

$$\vec{E}_x = \tilde{V}''[\exp(-j\tilde{K}''z)\vec{c}'' + \exp(j\tilde{K}''z)\vec{d}''] \qquad (13a)$$

$$-\vec{E}_y = \tilde{V}'[\exp(-j\tilde{K}'z)\vec{c}' + \exp(j\tilde{K}'z)\vec{d}'] + \tilde{G}''[\exp(-j\tilde{K}''z)\vec{c}'' + \exp(j\tilde{K}''z)\vec{d}''] \qquad (13b)$$

$$\vec{H}_x = \tilde{I}'[\exp(-j\tilde{K}'z)\vec{c}' - \exp(j\tilde{K}'z)\vec{d}'] \qquad (13c)$$

$$\vec{H}_y = -\tilde{G}'[\exp(-j\tilde{K}'z)\vec{c}' - \exp(j\tilde{K}'z)\vec{d}'] + \tilde{I}''[\exp(-j\tilde{K}''z)\vec{c}'' - \exp(j\tilde{K}z)\vec{d}''] \qquad (13d)$$

注意在方程式(12)中場分量的上標(g)是用來代表光柵區；為了簡化起見在這裡我們把它省略了。在方程式(13)中，$\vec{E}_x$、$\vec{E}_y$、$\vec{H}_x$ 和 $\vec{H}_y$ 是具有第 n 個空間諧波的振幅分別為 E_{xn}、$-E_{yn}$、H_{xn} 和 H_{yn} 作為它們的第 n 個元素的無限行向量。$\tilde{K}'$ 和 $\tilde{K}''$ 是第 m 個對角矩陣元素分別為 k'_{zm} 和 k''_{zm} 的對角矩陣。$\tilde{V}'$、$\tilde{V}''$、$\tilde{I}'$、$\tilde{I}''$、$\tilde{G}'$ 和 $\tilde{G}''$ 都是矩陣且定義如下

$$\tilde{V}' = (V'_{mn}u'_{ym}) \qquad (14a)$$

$$\tilde{V}'' = (V''_{mn}) \qquad (14b)$$

$$\tilde{I}' = (I'_{mn}) \qquad (14c)$$

$$\tilde{I}'' = (I''_{mn} v''_{mn}) \qquad (14d)$$

$$\tilde{G}' = (G'_{mn} v'_{ym}) \qquad (14e)$$

$$\tilde{G}'' = (G''_{mn} v''_{ym}) \qquad (14d)$$

這裡具有下標為 m 和 n 的元素位於第 n 列和第 m 行（取代第 m 列和第 n 行的傳統定義）。相對於 z 軸，方程式(13)中的橫向場分量都是需要滿足波導結構中分隔兩個組份層間界面邊界條件的切線場分量。在方程式(13)，行向量 $\vec{c}'$ 和 $\vec{d}'$ 分別包含 TE 模式向前與向後波的振幅；行向量 $\vec{c}''$ 和 $\vec{d}''$ 分別包含 TM 模式向前與向後波的振幅。這些 Floquet 模式將由邊界條件決定。

如上所解釋，相對 z 方向而言，橫向傳播向量 $\vec{k}_{tn}$，對於每一個在光柵層上和下方的多層結構中可以取為任意偏極化平面波的空間諧波為已知。不僅，在波浪紋區中包含 TE 和 TM 模式的一般場解已經由方程式(13)給出。更簡潔地，場解可以寫成

$$\vec{E}_t(z) = \tilde{P}[\exp(-j\tilde{K}z)c + \exp(j\tilde{K}z)d] \qquad (15a)$$

$$\vec{H}_t(z) = \tilde{Q}[\exp(-j\tilde{K}z)c - \exp(j\tilde{K}z)d] \qquad (15b)$$

要注意的是對 x 和 y 的依賴關係實際是可以消去的，為了簡化起見它們在這裡省略。這裡我們定義超向量和超矩陣：

$$\vec{E}_t(z) = \begin{bmatrix} -E_y(z) \\ E_x(z) \end{bmatrix} \qquad (16a)$$

$$\vec{H}_t(z) = \begin{bmatrix} H_x(z) \\ H_{xy}(z) \end{bmatrix} \qquad (16b)$$

$$C = \begin{bmatrix} C' \\ C'' \end{bmatrix} \qquad (16c)$$

$$d = \begin{bmatrix} d' \\ d'' \end{bmatrix} \qquad (16d)$$

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} \tilde{V}' & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{V}'' \end{bmatrix} \qquad (16e)$$

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{I}' & \tilde{0} \\ -\tilde{G}' & \tilde{I}'' \end{bmatrix} \qquad (16f)$$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{K}' & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{K}'' \end{bmatrix} \qquad (16g)$$

這裡 $\tilde{0}$ 是零矩陣。很明顯地，在矩陣的對角位置，$\tilde{V}'$、$\tilde{I}'$、$\tilde{V}''$ 和 $\tilde{I}''$ 成為內極化偶合的原因，那些在非對角矩陣位置，$\tilde{G}'$ 和 $\tilde{G}''$，為互極化偶合的原因。

多層結構的效應是由二階輸入導納矩陣來描述其特徵，以致於光柵層兩個表面對於每一個空間諧波的邊界條件是由方程式(5)的線性關係是來規定。使用將所有空間諧波包含在一起的超向量，方程式(5)的兩個線性方程式可以歸納為

$$\vec{H}_t(0) = -\tilde{Y}^{(up)}\vec{E}_t(0) \qquad (17a)$$

$$\vec{H}_t(t_g) = \tilde{Y}^{(dn)}\vec{E}_t(t_g) \qquad (17b)$$

這裡 $\vec{H}_t(0)$ 和 $\vec{H}_t(t_g)$ 是分別對應於 $z=0$ 和 $z=t_g$ 定義在方程式(16b)的超向量，並且類似的表達式也應用於 $\vec{E}_t$。$\tilde{Y}^{(up)}$ 和 $\tilde{Y}^{(dn)}$ 都是超矩陣，定義為

$$\tilde{Y}^{(up)} = \tilde{A}\tilde{Y}^{(a)}\tilde{A}^T \qquad (18a)$$

$$\tilde{Y}^{(dn)} = \tilde{A}\tilde{Y}^{(i)}\tilde{A}^{T} \quad (18b)$$

這裡 $\tilde{A}$ 是一個轉換矩陣且 $\tilde{Y}^{(a)}$ 和 $\tilde{Y}^{(i)}$ 為對角導納矩陣，它們分別定義為

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (18c)$$

$$\tilde{Y}^{(a)} = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_a' & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{Y}_a'' \end{bmatrix} \quad (18d)$$

$$\tilde{Y}^{(i)} = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_i' & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{Y}_i'' \end{bmatrix} \quad (18e)$$

上面三個超矩陣的每一個元素均為對角矩陣。

現在我們拿電和磁場間的線性關係方程式(17b)，在光柵層的下表面作為邊界條件以決定光柵層在 $z=0$ 的輸入導納矩陣。在方程式(15)之中令 $z=t_g$，從結果的方程式連同方程式(17b)，我們獲得在光柵中 Floquet 模式向前和向後振幅間的關係

$$\vec{d} = \exp(-j\tilde{K}t_g)\tilde{\Gamma}_{out}\exp(-j\tilde{K}t_g)\vec{c} \quad (19)$$

這裡 $\tilde{\Gamma}_{out}$ 是在光柵輸出表面的反射矩陣並定義為

$$\tilde{\Gamma}_{out} = [\tilde{Q} + \tilde{Y}^{(dn)}\tilde{P}]^{-1}[\tilde{Q} - \tilde{Y}^{(dn)}\tilde{P}] \quad (20)$$

將方程式(19)中的 $\vec{d}$ 代入方程式(15)取 $z=0$，我們可以在結果的方程式中消去 $\vec{c}$ 而獲得

$$\vec{H}_t(0) = \tilde{Y}_{in}\vec{E}_t(0) \quad (21)$$

這裡 $\tilde{Y}_{in}$ 是在光柵輸入面的輸入導納矩陣，它定義為

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_{in} &= \tilde{Q}[\tilde{1} - \exp(-j\tilde{K}t_g)\tilde{\Gamma}_{out}\exp(-j\tilde{K}t_g)] \\ &\quad \times[\tilde{1} + \exp(-j\tilde{K}t_g)\tilde{\Gamma}_{out}\exp(-j\tilde{K}t_g)]^{-1}\tilde{P}^{-1}\end{aligned} \quad (22)$$

為了完整性的緣故，從方程式(15)和(19)可以直接顯示，輸入和輸出表面間切線電場向量之間的關係

$$\vec{E}_t(t_g) = \tilde{T}E_t(0) \quad (23)$$

這裡 $\tilde{T}$ 是切線電場向量間的傳遞矩陣；給出為

$$\begin{aligned}&\tilde{T} = \tilde{P}(1+\tilde{\Gamma}_{out}) \\ &[\tilde{1} + \exp(-j\tilde{K}t_g)\tilde{\Gamma}_{out}\exp(-j\tilde{K}t_g)]^{-1}\tilde{P}^{-1}\end{aligned} \quad (24)$$

要注意的是對於一個給定的結構，輸入導納和傳遞矩陣是很容易決定的並且與選擇分析它們的座標系統無關。方程式(20)、方程式(22)和(24)一起是決定單光柵層輸入與輸出關係的公式。這些公式對於分析一疊光柵層特別有用，對於任意連續剖面圖的光柵可以提供分片常數近似[5]。

在確定了 k_x 和 k_y 以後，平面波散射問題所獲得的結果可以很容易的在這裡使用。薄膜的上表面 $z=0$ 取為參考面，來自方程式(17)顯示的切線電場和磁場向量藉由

$$\vec{H}_t(0) = \tilde{Y}^{(up)}\vec{E}_t(0) \quad (25a)$$

$$\vec{H}_t(0) = -\tilde{Y}^{(dn)}\vec{E}_t(0) \quad (25b)$$

敘述相互間的關係，這裡 $\tilde{Y}^{(up)}$ 是在參考面往上看的導納矩陣並等於光柵層端

接空氣區為本徵導納矩陣的輸入導納矩陣，$\tilde{Y}^{(dn)}$是在參考面往下看輸入導納的矩陣。要在一次注意的是，在方程式(25b)中的負號是考慮了導納矩陣的定義與波傳播方向相反的事實。取在方程式(25)中兩個方程式相減，我們獲得齊次線性方程式系統：

$$[Y^{(up)}+Y^{(dn)}]\vec{E}_t(0)=0 \qquad (26)$$

方程式系統存在非尋常解的條件是係數矩陣的行列式消失，即

$$\det[Y^{(up)}+Y^{(dn)}]=0 \qquad (27)$$

它定義了光柵波導的色散關係並且由給定值的k_y決定唯一的未知參數k_x。

必須要注意的是在決定反射波的振幅向量$\vec{b}$，在處理平面波散射時，我們已經假設反矩陣存在。於不存在入射波的情況，入射波的振幅向量$\vec{a}$，完全等於零，並且存在$\vec{b}$的非尋常解，若且唯若方程式中的反矩陣是奇異的，即

$$\det(\tilde{A}\tilde{Y}^{(a)}+\tilde{Y}_{in}\tilde{A})=0 \qquad (28)$$

這是散射問題的共振條件。對於導波的問題，我們所感興趣的是波沿多層結構傳播；因此z軸視為橫向方向。因此方程式(28)稱為橫向共振條件。可以很直接顯示，使用矩陣的運算，方程式(27)和(28)表述著光柵波導的色散關係是可以由單一的參考面往相反方向看的輸入導納矩陣求和的結構橫向共振條件而獲得。事實上，可以證明取任何一個組成面作為參考面都可以獲得相同的橫向共振條件；方程式(27)是取光柵較低的表面作為參考面而獲得的，而方程式(28)則是取光柵的上表面作為參考面而獲得的。沿著光柵週期變化的傳播常數k_x，可以作為邊界值問題的本徵值而決定且藉由解線性方程式的齊次系統方程式，可以獲得所有空間諧波的切線電場向量，並且可以獲得平面波散射的所有場量。這就完整地以公式化表述光柵波導的導波。

4. 模擬結果

為了舉例說明某些二維週期性的導波結構可以使用上面所討論的方法獲得， 我們下面將使用上述方法分析如圖 4 與圖 5 的長方形柱狀光子晶體。關於長方形柱狀光子晶體的結構參數有幾點要說明的是，長方形柱狀光子晶體結構本身為二維的光子晶體，其中光子晶體間的週期是用d來表示而外層與透射層的介電常數分別為ε_{r1}和ε_{r2}，至於光子晶體長形方柱間的夾層的介電常數則分別為ε_f，ε_{f1}和ε_{f2}。圖 4 我們考慮以 30GHZ 的電磁波 TM 模式正向射入雙層光子晶體結構的情形，其中晶格常數為$d=2mm$， 導電方柱的高度為$T_g=0.001mm$，$\varepsilon_g=1+j60\sigma\lambda_0$，其中$\lambda_0$為自由空間中的波長而$\sigma=5.8\times10^4$，$\varepsilon_{r1}=1.0$，$\varepsilon_{r2}=1.0$和$\varepsilon_f=3.5$。圖 4 顯示反射波功率在某些特定點有極小值。這些反射功率的零點是由於薄膜內的主空間諧波產生共振(resonance)的結果，其中實線的部分為嚴格的解法而虛線的部分為等效電路模型中只考慮一個空間諧波的結果。理論分析的結果可以用上下層的金屬光柵猶如兩片金屬平板，散射的空間諧波只要滿足平行板波導的共振條件就會被限制在薄膜層內，以致無任何的反射波返回入射介質區(incident region)。圖 5 我們考慮以 30GHZ 的電磁波 TM 模式正向射入雙層光子晶體結構的情形，其中晶格常數為$d=1mm$， 導電方柱的高度為

$T_{g1}=0.001mm$ $T_{g2}=0.001mm$

$T_{g3}=0.001mm$ ，$T_{f1}=2.0mm$ ，$\varepsilon_g=1+j60\sigma\lambda_0$，其中 λ_0 為自由空間中的波長而 $\sigma=5.8\times10^4$ ，$\varepsilon_{r1}=1.0$ ，$\varepsilon_{r2}=1.0$ 和 $\varepsilon_{f1}=1.0$ 。三層光柵的計算結果也依同法得到如圖 4 所示。利用多光柵嚴格計算分析(標示為 cascade)與等效電路法求解，比較兩者的結果可發現當第二層薄膜厚度大於一倍週期時，兩組曲線吻合得很好。在此並沒有如雙層光柵結構一般的零點，原因是散射的空間諧波傳到第二層薄膜時，功率已經不大，當滿足第二層薄膜厚度所對應的共振條件時，仍有部分空間諧波可以經前二層金屬光柵的散射返回入射介質。

5. 結論

使用等效網路法分析光子晶體結構除單純的能帶與能隙分析外，我們亦可以將此方法利用組抗的概念將光子晶體一層一層地串接起來分析光與光子晶體間的交互作用，並且可以獲得明確的物理解釋。當我們使用嚴格的等效網路分析光子晶體結構時，我們也可以按照平面波展開法的方式考慮填充因子對光子晶體的影響，我們也發現週期排列而成的光子晶體，其能隙寬度將隨著填充率變小而增加。而能隙的中心也會隨著填充率變大而減小。

我們未來利用改變光子晶體填充率或光子晶體圓柱大小及兩種介質間的相對介電常數的差別來改變帶隙的間隔與位置，用以分析有限多層光子晶體漏波的行為，並以此作為設計光電與微波元件的依據。

6. 參考文獻

[1]E. Yablonovitch, “Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics”, Phys. Rev. lett., vol 58, pp. 2059-2062, 1987.

[2] J. D. Joannopoulos, R. D. Meade, and J. N. Winn, Photonic Crystal (Princeton University Press, Princeton, NJ,1995)

[3] E. Yablonovitch, “Photonic band-gap structures,” J. Opc. Amer. B, vol.10, pp.283-295, Feb.1993.

[4] S. T. Peng, “Rigorous formulation of scattering and guidance by dielectric grating waveguide: J. Opt. Soc. Am. A, vol. 6, NO. 12, 1869-1883, (1989).

[5] S. T. Peng, T. Tamir, and H. L. Bertoni, “Theory of periodic dielectric waveguides ,” IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-23, 123-133, (1975).

[6] K. Sakoda, “Numerical analysis of eigenmodes localized at line defects in photonic lattices,” Physical Review B, vol. 56, pp. 4380, pp. -, 1997.

誌謝

本研究成蒙國科會 NSC 92-2215-E-216-002 補助經費謹此致謝。感謝許元耀與蕭啟明兩位先生的幫忙與協助。

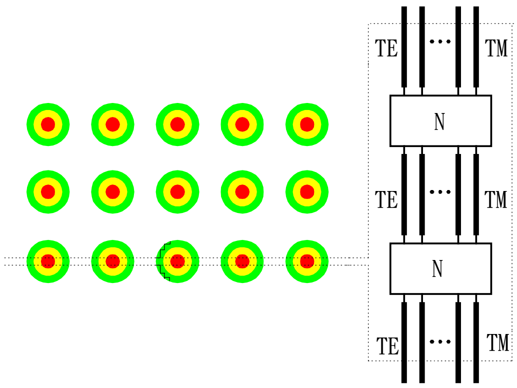


圖 1 表示二維的光子晶體結構及其等效網路

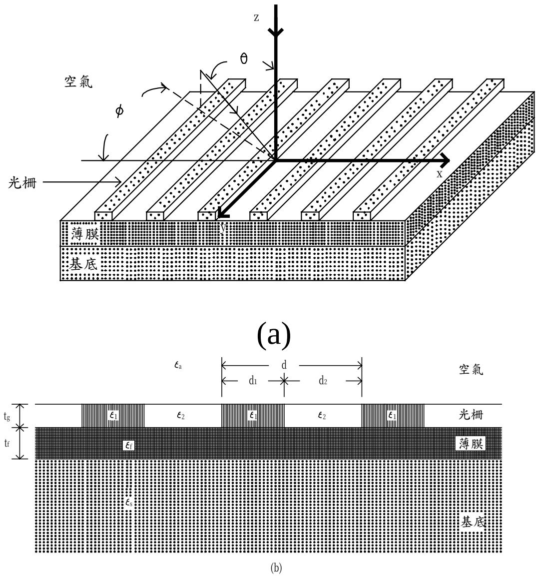


圖 2 (a) 介質波導光柵的結構(在任意方向入射的平面波) (b) 光柵波導的側視圖

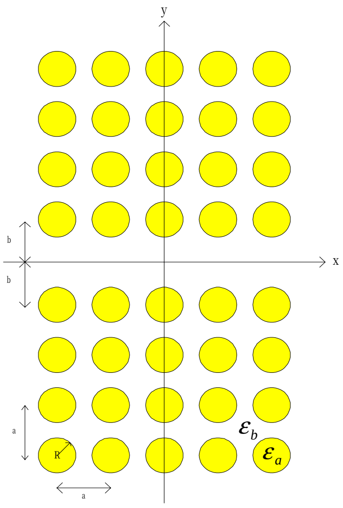
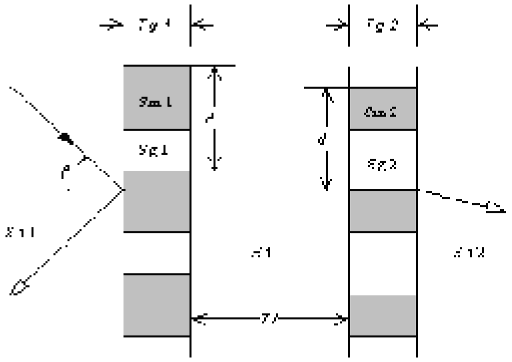


圖 3 介電質圓柱正方排列的二維光子晶體結構圖



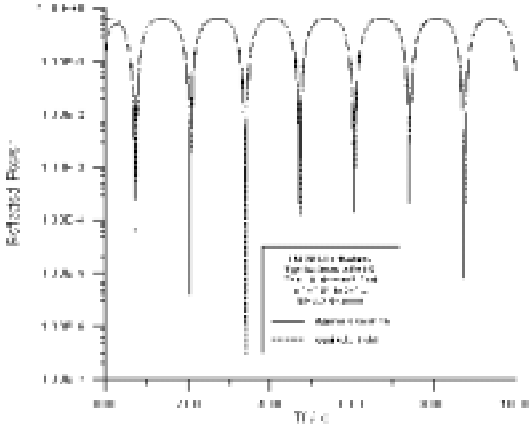


圖 4

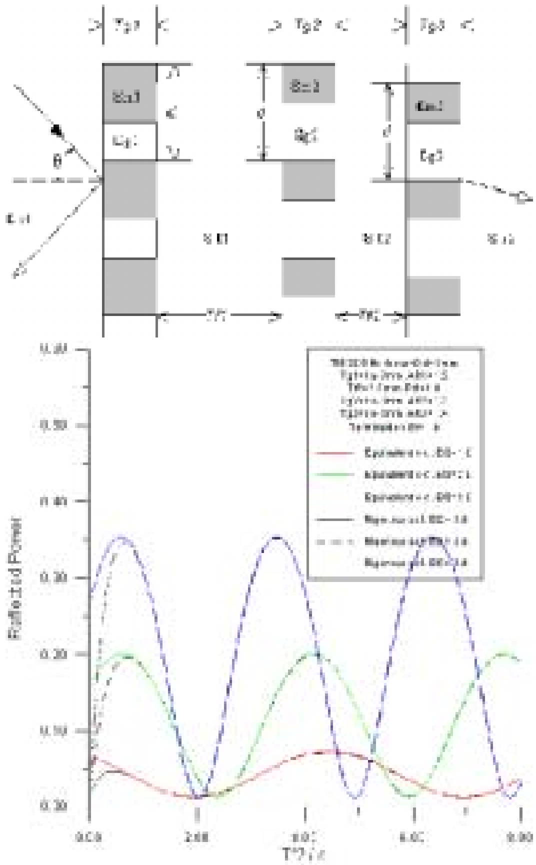


圖 5