

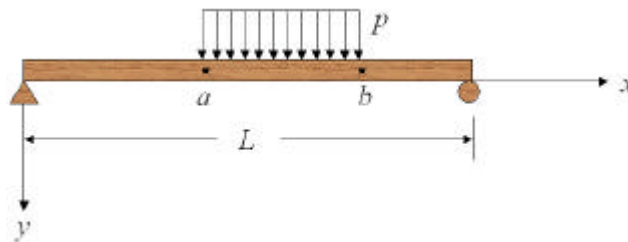
1. 週期函數 $f(t) = \begin{cases} t + \frac{p}{2} & -p < t < 0 \\ -t + \frac{p}{2} & 0 < t < p \end{cases}$, $f(t+2p) = f(t)$, 請將 $f(t)$ 分解為傅立葉級數 (25%)

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -5 & 9 & -3 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, 請 (a) 求出 A 的特徵值及特徵向量 (b) 找出矩陣 D 使得 $D^T A D$ 為一對角矩陣 (25%)

3. 試求 $\frac{dy}{dx} = e^{2x}(1+y)$ 之通解 (General Solution)。 (10%)

4. 試解出聯立常微分方程式 $\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_1 + y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = 3y_1 - y_2 \end{cases}$ 的通解。 (15%)

5. 如圖所示之梁受外力荷重問題，試依以下步驟推求梁之撓度(垂直變位)。



已知問題之數學模式為：

• 控制方程式： $EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x)$

• 邊界條件： $y(0)=0$, $y(L)=0$, $EIy''(0)=0$, $EIy''(L)=0$

其中 E 為梁之材料的楊氏係數(Young's Modulus); I 為梁之慣性矩(Moment of Inertia); $q(x)$ 表作用於梁上之外力荷重; $y(x)$ 是梁之撓度; EIy'' 表梁之彎矩。

- (a) 試根據半幅展開(Half Range Expansion)的觀念，將外力荷重 $q(x)$ 作奇函數的展開，請先繪出展開後外力荷重 $q(x)$ 之 Fourier 級數的示意圖，至少畫出兩個週期。(5%)
- (b) 根據(a)之展開圖形，請將外力荷重 $q(x)$ 表示成對應之 Fourier 級數。(5%)
- (c) 若 $q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2p}{np} \left(\cos \frac{npa}{L} - \cos \frac{npb}{L} \right)$ ，試解出梁之撓度 $y(x)$ 。(12%)
- (d) 根據(c)所求出之解，考慮 $a=0$, $b=L$ ，再計算梁之中點的撓度 $y(L/2)$ 。(3%)