

1. 試求 $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ 之通解 (General Solution)。 (15%)

2. 已知限制含水層中之滲流量計算可根據 Darcy 定律 $Q = kiA = k \frac{dh}{dr} (2\pi r D)$ ，其中 Q 是滲流量 (單位： m^3/s)； k 為土壤滲透係數 (Permeability，單位： m/s)； i 係水力梯度 (Hydraulic Gradient，無單位)； A 為水流通過的截面積 (單位： m^2)； h 係水頭差 (單位： m)； r 係觀測井至抽水井之距離 (單位： m)； D 係限制含水層之厚度 (單位： m)。若今安排兩個觀測井，分別位於 r_1 、 r_2 位置，其所對應之觀測井水位面分別為 h_1 與 h_2 ，試證明限制含水層之滲透係數可表為： (15%)

$$k = \frac{Q}{2\pi D} \frac{\ln(r_2/r_1)}{h_2 - h_1}$$

3. 試解出聯立常微分方程式 $\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 5y_2 + 23 \\ \frac{dy_2}{dt} = -5y_1 + 15t \end{cases}$ 的通解。 (20%)

4. 請利用 Gauss-Jordan 消去法求出 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -5 & 9 & -3 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ 的反矩陣 (20%)

5. 假設函數 $f(x)$ 的傅立葉轉換 (Fourier Transform) 定義為

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx, \text{ 請求出以下函數的傅立葉轉換 (15\%)}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

6. 請求出函數 $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$ 在點 $(x, y, z) = (2, 1, 3)$ 沿向量 $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ 方向上的方向導數 (directional derivative) (15%)