

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫 成果報告
 期中進度報告

坡地災害潛勢、觀測與預警技術之研究(一)-子計畫：
多孔介質彈性力學與生態工法在邊坡穩定上之應用研究(I)

計畫類別： 個別型計畫 整合型計畫

計畫編號：NSC 93-2625-Z-216-001-

執行期間：93 年 8 月 1 日至 94 年 7 月 31 日

計畫主持人：呂志宗

共同主持人：

計畫參與人員：

成果報告類型(依經費核定清單規定繳交)： 精簡報告 完整報告

本成果報告包括以下應繳交之附件：

- 赴國外出差或研習心得報告一份
- 赴大陸地區出差或研習心得報告一份
- 出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份
- 國際合作研究計畫國外研究報告書一份

處理方式：除產學合作研究計畫、提升產業技術及人才培育研究計畫、
列管計畫及下列情形者外，得立即公開查詢

涉及專利或其他智慧財產權， 一年 二年後可公開查詢

執行單位：中華大學土木工程學系

中 華 民 國 94 年 7 月 31 日

目 錄

1. 呂志宗，2004/10/14，「溫泉抽水引致之地層下陷理論解析」，九十三年度農業工程研討會論文集，第 105-116 頁。(本文係在國科會研究計畫 NSC93-2625-Z-216-001 補助下所完成。)
2. 呂志宗、林憲俞，2004/10/14，「溫泉管線引致之地層力學行為變化理論解析」，九十三年度農業工程研討會論文集，第 117-128 頁。(本文係在國科會研究計畫 NSC93-2625-Z-216-001 補助下所完成。)
3. 呂志宗、林鳳彩，2004/11/26-27，「單點抽水引致的半無限域地表沉陷之暫態基本解」，中國機械工程學會第二十一屆全國學術研討會論文集，第 1105-1110 頁。(本文係在國科會研究計畫 NSC93-2625-Z-216-001 補助下所完成。)
4. 呂志宗、邱威誠，2004/11/26-27，「橫向等向性多孔介質受無限長度水平線熱源作用之閉合解」，中國機械工程學會第二十一屆全國學術研討會論文集，第 2317-2322 頁。(本文係在國科會研究計畫 NSC93-2625-Z-216-001 補助下所完成。)
5. 林振華、呂志宗，2004/12/3-4，「冷凍工法施工設計條件之研究」，中華民國第二十八屆全國力學會議論文集，第 955-962 頁。(本文係在國科會研究計畫 NSC93-2625-Z-216-001 補助下所完成。)
6. 呂志宗，2004/12/3-4，「溫泉抽水引致的橫向等向性地層沉陷之理論解析」，中華民國第二十八屆全國力學會議論文集，第 963-970 頁。(本文係在國科會研究計畫 NSC93-2625-Z-216-001 補助下所完成。)
7. 呂志宗、林鳳彩，2004/12/3-4，「單點抽水引致的地表水平暨垂直位移之暫態閉合解」，中華民國第二十八屆全國力學會議論文集，第 971-978 頁。(本文係在國科會研究計畫 NSC93-2625-Z-216-001 補助下所完成。)
8. 呂志宗、謝瑜萱，2004/12/24，「網路化互動式多媒體教學在河川生態工法之應用探討」，運用資訊科技創新教學以發展數位機會研討會論文集，摘要集第 10 頁。(本文係在國科會研究計畫 NSC-92-2516-S-216-002 和 NSC93-2625-Z-216-001 補助下所完成。)
9. 呂志宗，2005/9/8-10，「深層溫泉開發所引致之地層力學行為變化探討」，第十一屆大地工程研討會論文集，第 I09-1~I09-5 頁。(本文係在國科會研究計畫 NSC93-2625-Z-216-001 補助下所完成。)
10. 呂志宗、謝瑜萱，2005/9/8-10，「以黃金比例促進生態工程之教學設計探討」，第十一屆大地工程研討會論文集，第 I10-1~I10-8 頁。(本文係在國科會研究計畫 NSC93-2625-Z-216-001 補助下所完成。)

以下論文已發表，論文基本資料如下：

呂志宗，2004/10/14，「溫泉抽水引致之地層下陷理論解析」，九十三年度農業工程研討會論文集，第 105-116 頁。(本文係在國科會研究計畫 NSC93-2625-Z-216-001 補助下所完成。)

溫泉抽水引致之地層下陷理論解析

Theoretical Analysis of Land Subsidence Due to Hot Spring Pumping

中華大學土木工程學系

副教授

呂志宗

John C.-C. Lu

摘要

本文基於 Biot 所建立之三維壓密模式，考慮含豐富溫泉之半無限域地層為完全飽和的多孔介質，且溫泉補注充分。溫泉抽水時，由於滲流影響，形成負的超額孔隙水壓力，因而地層中作用於溫泉水之應力逐漸轉移至固體顆粒上，當溫泉水達到穩態滲流時，地層形成新的應力平衡狀態，作用於固體部分之有效應力增加，形成壓密沉陷。本文係將地層模擬為等向性溫泉地層，再引用適當的積分轉換方法，研討出以穩定速率作點狀抽水所引起的壓密沉陷之穩態閉合解，使有助於了解溫泉抽水對地層下陷所造成的影響。

關鍵詞：溫泉抽水，地層下陷，閉合解

Abstract

Based on Biot's three-dimensional consolidation theory of porous media, the long-term subsidence of a saturated elastic half-space containing a point sink due to hot spring fluid withdrawal is studied. As pumping of hot spring from an aquifer takes place, the pore water pressure is reduced in the withdrawal region. This leads to an increase in the effective stress between the solid particles and subsidence of ground surface. The stratum is modeled as isotropic porous media to simulate the earth medium. Steady state closed-form solutions of the consolidation deformation are obtained by using the appropriate integral transform techniques. Results can provide a better understanding of the influence of hot spring pumping on the subsidence.

Keywords: Hot Spring Pumping, Land Subsidence, Closed-Form Solution

一、前言

溫泉觀光業是政府極力推廣的觀光產業之一，然而根據學者專家的研究得知，台灣地區現有的溫泉開發實已逐漸達到飽和，許多業者皆反應無法取得足量的溫泉水源，而必需以非溫泉水源替代、過濾回收或化學製造等方式供應溫泉，亦即台灣地區的溫泉許

多實際上均已呈超量開發。作者於 2004 年 9 月 10 日，曾親自聽聞屏東縣四重溪溫泉業者的描述，提及當地現在所取得的溫泉濃度跟十年前比較起來已較淡，這似乎是當地的溫泉已逐漸不足的一項訊息。因此，台灣地區各地的溫泉現況，應有必要定期以科學化的調查方式，建立相關的資料庫，以供政府相關決策單位作參考。溫泉是地下水的一種，若是超量開發，一樣也是會有地層下陷的危險，只因溫泉抽水區的地質條件較佳或因人煙稀少等因素，而較常被人們所忽略，但是亦應未雨綢繆，瞭解抽取溫泉所可能引致的地層下陷問題，以防範於未然。

溫泉抽水與一般常見的地下水井抽水類似，但考慮溫泉抽水問題時，還應該考慮熱能效應的影響。當溫泉自溫泉脈中被抽出時，地層中作用於溫泉之壓應力會逐漸轉移至地層固體顆粒上，地層形成壓密現象，而導致地層下陷。Terzaghi (1943) 首先引用有效應力觀念 (Effective Stress Concept) 說明土壤的壓密過程，在 Terzaghi (1943) 的理論模式中，須先解析出平衡孔隙水壓力，然後再間接計算出壓密沉陷量，故稱之為非耦合 (Uncoupled) 壓密模式。然而 Biot (1941, 1955) 所考慮之孔隙水的平衡過程則與固體介質直接相關，所得出之結果亦被證實較為合理可靠，本文即引用 Biot 壓密模式建立基本方程式。Biot (1941, 1955) 所建立之三維壓密理論，在學理上亦常被稱之為多孔介質彈性力學理論 (Poroelasticity)。基於 Biot (1941) 的三維壓密理論模式，Bear 與 Corapcioglu (1981, 1983) 以地下水流動觀點，分別研討並解析出受限含水層 (Confined Aquifer) 與非受限含水層 (Unconfined Aquifer) 中因大區域抽水所引致之壓密沉陷問題；Safai 與 Pinder (1979, 1980) 曾以有限元素法解析不飽和土層中之抽水所引致的壓密沉陷；Lewis 與 Schrefler (1978a, 1978b) 則應用有限元素法作義大利威尼斯城的個案研究；Yeh 等人 (1996) 亦曾以有限元素法研討地層下陷問題。Booker 與 Carter (1986a, 1986b)、Tarn 與 Lu (1991) 亦曾研討出汲水引致的地層壓密問題之閉合解 (Closed-Form Solution)，並探討地表邊界條件與地層異向性對地層壓密沉陷的影響。

以上之研究主要是考慮抽水時，水體積減少暨地層壓力變化對地層下陷的影響。若欲探討溫泉抽水引致的地層下陷問題，則還應考慮溫泉中之熱能流動對地層下陷的影響。雖然溫泉抽水地區之地質條件有可能是屬於土壤或岩層條件，但學理上之模擬，均可採用 Biot (1941, 1955) 所建立之多孔介質彈性力學理論。為考慮溫泉中之熱能效應的影響，必需在多孔介質彈性力學理論中再加入熱能流動所引致的耦合效應，並探討熱能效應對地層力學行為變化的影響，以往這方面的研究亦有許多，說明如下。Schiffman (1971) 首先根據 Biot (1941) 壓密模式，並引用 Fourier 熱傳導定律與能量守恆定律，探討熱壓密問題；Booker 與 Savvidou (1984, 1985, 1989) 曾將熱流效應的影響加入 Biot (1941) 所建立之多孔介質壓密理論，推導出地層受點熱源、球體熱源以及異向性滲流情況下之多孔介質熱彈性力學問題；Amadei 等學者 (1987) 曾探討橫向等向性岩層受應力作用時之閉合解；Aversa 和 Evangelista (1993) 則對 Neapolitan 地區的黃凝灰岩作過熱膨脹性質的探討；Al-Nimr 以及 Naji (1999) 曾說明沉積岩等具有橫向等向性之熱傳輸現象；Lu 等人 (2003) 則根據點熱源問題之基本解 (Fundamental Solution)，進一步推導出地層受線熱源作用之解。這些文獻之研究係單獨考慮熱能效應對地層力學行為變化的影響，可以這些相關研究成果為基礎，結合抽地下水引致沉陷問題之相關研

究，進一步探討溫泉抽水引起的地層下陷問題。

本文將地表面模擬一半無限域 (Half-Space)，而地層之力學性質、熱流性質與滲流性質等皆考慮為等向性 (Isotropic)。數學模式中，地表邊界是模擬為完全透水暨恆溫情況，以在地表下深度 h 位置，有一點溫泉抽水源模擬溫泉抽水的現象；考慮溫泉地層飽和含水，溫泉補注充分，使抽出的溫泉與補注的溫泉能保持平衡，研討出當溫泉抽水達穩態 (Steady-State) 平衡時所引致的地表長期沉陷。所得出之結果可供作決策單位正確的科學參考數據，避免不合宜的溫泉開發規劃。因本文所研討出之解為可用簡單函數表示的穩態閉合解，故也可供許多數值分析師在應用數值分析軟體作複雜的計算之前，作分析檢核之用，本文之研究成果具有極高之研究與應用價值。

二、數學模式

2.1 等向性多孔隙地層之熱彈性力學理論

2.1.1 介質位移、孔隙流體壓力與介質溫度變化量方程式

本文係擬探討如圖 1 所示之半無限域溫泉地層因點抽水所引起的沉陷問題，首先介紹問題之數學模式。本研究係引用多孔介質熱彈性力學理論 (Thermo-poroelasticity) 建立基本方程式，茲以微小之代表性元素體 (Representative Elementary Volume) 分析多孔隙溫泉地層之力平衡、質量守恆與能量守恆等方程式，且考慮元素中之固體介質和孔隙流體具有相同的溫度。其主要研究對象為固體部分所組成的多孔介質、流經孔隙之流體以及熱量之擴散傳輸現象。多孔隙溫泉地層在受外力作用、流體流動或熱能流動時，都會造成多孔隙溫泉地層之各項物理量產生變化，例如其體積、應力、溫度、超額孔隙水壓等均會產生變化。在點狀溫泉抽水作用情況下，若讓座標 z 軸通過抽水點，則問題可考慮為軸對稱。當多孔隙溫泉地層之應變量很微小時，則多孔隙溫泉地層之應變 $\varepsilon_{ij}(i, j = r, \theta, z)$ 和位移 $u_i(i = r, \theta, z)$ 的線性關係式，可以軸對稱圓柱座標 (r, z) 表示為：

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad (1)$$

因問題為軸對稱，故並不會產生環向位移量 u_θ ，亦即 $u_\theta = 0$ 。令作用於溫泉地層之總應力 (Total Stress) 為 τ_{ij} (張力為正)、作用於固體介質之有效應力 (Effective Stress) 為 σ'_{ij} (張力為正)、超額孔隙水壓力為 p (壓力為正)、溫泉地層之溫度變化量為 θ ，再根據 Terzaghi (1943) 的有效應力觀念 $\tau_{ij} = \sigma'_{ij} - p\delta_{ij}$ (δ_{ij} 為 Kronecker delta)，則：

$$\tau_{rr} = (\lambda + 2G)\varepsilon_{rr} + \lambda(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) - (2G + 3\lambda)\alpha_s\theta - p, \quad (2a)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \lambda\varepsilon_{rr} + (\lambda + 2G)\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda\varepsilon_{zz} - (2G + 3\lambda)\alpha_s\theta - p, \quad (2b)$$

$$\tau_{zz} = \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) + (\lambda + 2G)\varepsilon_{zz} - (2G + 3\lambda)\alpha_s\theta - p, \quad (2c)$$

$$\tau_{rz} = 2G\varepsilon_{rz}, \quad (2d)$$

其中 $\lambda = 2G\nu/(1-2\nu)$ 是等向性溫泉地層的 Lamé 常數， ν 係等向性溫泉地層之波松比

(Poisson's Ratio); $G = E/2(1+\nu)$ 為等向性溫泉地層之剪力模數 (Shear Modulus), E 是等向性溫泉地層之楊氏係數 (Young's Modulus); α_s 則為等向性溫泉地層中之固體介質的線性熱膨脹係數 (Linear Thermal Expansion Coefficient)。

作用於溫泉地層之總應力需滿足力平衡方程式 $\tau_{i,j} + f_i = 0$, 在軸對稱情況下, 力平衡方程式為:

$$\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + f_r = 0, \quad (3a)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + f_z = 0. \quad (3b)$$

若不考慮微體力 (Body Force) f_i 的影響, 並引用 Terzaghi (1943) 的有效應力觀念, 先將式(1)代入式(2a)-(2d), 再將式(2a)-(2d)代入力平衡方程式(3a)、(3b)中, 則軸對稱多孔介質熱彈性力學問題之基本方程式可以溫泉地層之位移量 u_i 、溫泉地層之溫度變化量 ϑ 和超額孔隙水壓 p 等表為:

$$G\nabla^2 u_r + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} - G \frac{u_r}{r^2} - \frac{2G(1+\nu)\alpha_s}{1-2\nu} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (4a)$$

$$G\nabla^2 u_z + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{2G(1+\nu)\alpha_s}{1-2\nu} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (4b)$$

其中微分運算子 (Differential Operator) $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$; 溫泉地層之體積應變量

$$\varepsilon \text{ 可表為 } \varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

2.1.2 流量連續方程式和熱平衡方程式

本文是將均質之溫泉地層模擬為等向性的線彈性多孔介質, 其中孔隙流體的流動和熱能之擴散傳輸等需分別符合質量守恆和能量守恆定律, 如以下所示:

$$-\nabla \cdot [n(\mathbf{v}_w - \mathbf{v}_s)] + q_w = 0, \quad (5a)$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{h}_e + q_h = 0, \quad (5b)$$

其中 \mathbf{v}_w 與 \mathbf{v}_s 分別為流體與固體之位移速度; \mathbf{h}_e 係熱流率 (Heat Flux); n 是多孔介質之孔隙率 (Porosity); q_w 與 q_h 分別為自溫泉地層中抽水時的水體積與熱能的影響量。因係考慮溫泉抽水, 泉水中會含有熱能, 故需同時考慮 q_w 與 q_h 的影響。

溫泉地層中孔隙水的流動需滿足 Darcy 定律, 溫泉地層中之熱傳導現象需滿足 Fourier 定律, 亦即:

$$n(\mathbf{v}_w - \mathbf{v}_s) = -\frac{k}{\gamma_w} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{i}_z \right), \quad (6a)$$

$$h_c = -\lambda_r \left(\frac{\partial g}{\partial r} i_r + \frac{\partial g}{\partial z} i_z \right), \quad (6b)$$

式中 k 與 λ_r 分別為等向性溫泉地層之滲透係數 (Permeability) 與熱傳導係數 (Conductivity); γ_w 是溫泉水之單位重 (Unit Weight)。

將方程式(6a)、(6b)分別代入式(5a)、(5b)，並考慮單位時間內有 Q_w 體積之溫泉水被抽出，其中包含 Q_h 焦耳的熱能。若抽水深度為 h ，並將抽水點之座標位置落在 $(0, h)$ 位置上，則可推得另兩個基本控制方程式如下：

$$\frac{k}{\gamma_w} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) - \frac{Q_w}{2\pi r} \delta(r) \delta(z-h) = 0, \quad (7a)$$

$$\lambda_r \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \right) - \frac{Q_h}{2\pi r} \delta(r) \delta(z-h) = 0, \quad (7b)$$

式中 $\delta(x)$ 是 Dirac delta 函數。式(4a)、(4b)、(7a)與(7b)組成問題之基本方程式。

2.2 邊界條件與初始條件

茲模擬溫泉地層為一半無限域多孔介質，並考慮溫泉地層因抽水後之長期變化，所以數學模式中不會出現時間因素的影響。在 $z=0$ 之地表邊界位置上，係考慮地表邊界無正向應力及剪應力變化、無孔隙水壓變化 (透水情況) 且無溫度變化 (恆溫狀態) 等，因此在此邊界上之邊界條件可表為：

$$\sigma'_r(r, 0) = 0, \quad \sigma'_{rz}(r, 0) = 0, \quad p(r, 0) = 0, \quad g(r, 0) = 0. \quad (8)$$

在 $z \rightarrow \infty$ 之無限深遠處，其地層位移、超額孔隙水壓和地層溫度變化量等應不會受到點抽水的影響，所以無限深遠處之邊界條件可表為：

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \{u_r(r, z)\} \rightarrow 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \{u_z(r, z)\} \rightarrow 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \{p(r, z)\} \rightarrow 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \{g(r, z)\} \rightarrow 0. \quad (9)$$

本文係考慮問題之各項初始條件均為零。因係考慮溫泉地層抽水後之長期地層下陷情況，故數學模式中之各物理變化量均不會出現時間變數 t 。

三、積分轉換解析

本文係引用積分轉換方法解析如圖 1 所示點溫泉抽水問題之數學模式，所採用的解析方法為 Hankel 積分轉換與聯立微分方程式的標準解法，推導出半無限域溫泉地層受點抽水作用所引致的地表沉陷之穩態閉合解。首先對控制方程式(4a)、(4b)、(7a)、(7b)中之變數 r 分別作一階、零階、零階與零階之 Hankel 積分轉換，如以下所示：

$$\int_0^{\infty} \left[G \nabla^2 u_r + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} - G \frac{u_r}{r^2} - \frac{2G(1+\nu)\alpha_r}{1-2\nu} \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r} \right] r J_1(\xi r) dr = 0, \quad (10a)$$

$$\int_0^{\infty} \left[G \nabla^2 u_z + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{2G(1+\nu)\alpha_r}{1-2\nu} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} \right] r J_0(\xi r) dr = 0, \quad (10b)$$

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{k}{\gamma_w} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) - \frac{Q_w}{2\pi r} \delta(r) \delta(z-h) \right] r J_0(\xi r) dr = 0, \quad (10c)$$

$$\int_0^{\infty} \left[\lambda_v \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) - \frac{Q_h}{2\pi r} \delta(r) \delta(z-h) \right] r J_0(\xi r) dr = 0, \quad (10d)$$

式中 $J_n(x)$ 表 n 階之第一種類型的 Bessel 函數。再分別對邊界條件方程式(8)、(9)中之變數 r 作如以下所示之一階、零階、零階、零階、一階、零階、零階、零階的 Hankel 積分轉換：

$$\int_0^{\infty} r \sigma'_{zz}(r,0) J_1(\xi r) dr = 0, \quad (11a)$$

$$\int_0^{\infty} r \sigma'_{zz}(r,0) J_0(\xi r) dr = 0, \quad (11b)$$

$$\int_0^{\infty} r p(r,0) J_0(\xi r) dr = 0, \quad (11c)$$

$$\int_0^{\infty} r \vartheta(r,0) J_0(\xi r) dr = 0, \quad (11d)$$

$$\int_0^{\infty} \lim_{z \rightarrow \infty} \{ u_r(r,z) \} r J_1(\xi r) dr \rightarrow 0, \quad (12a)$$

$$\int_0^{\infty} \lim_{z \rightarrow \infty} \{ u_z(r,z) \} r J_0(\xi r) dr \rightarrow 0, \quad (12b)$$

$$\int_0^{\infty} \lim_{z \rightarrow \infty} \{ p(r,z) \} r J_0(\xi r) dr \rightarrow 0, \quad (12c)$$

$$\int_0^{\infty} \lim_{z \rightarrow \infty} \{ \vartheta(r,z) \} r J_0(\xi r) dr \rightarrow 0. \quad (12d)$$

式(10a)-(10d)作適當之積分後，可繼續化簡為：

$$-2\eta \xi^2 U_r + \frac{d^2 U_r}{dz^2} - (2\eta - 1) \xi \frac{dU_z}{dz} + 2(3\eta - 2) \alpha_r \xi \Theta + \frac{1}{G} \xi P = 0, \quad (13a)$$

$$(2\eta-1)\xi \frac{dU_r}{dz} - \xi^2 U_z + 2\eta \frac{d^2 U_z}{dz^2} - 2(3\eta-2)\alpha_s \frac{d\Theta}{dz} - \frac{1}{G} \frac{dP}{dz} = 0, \quad (13b)$$

$$\frac{k}{r_w} \left(-\xi^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) P - \frac{Q_w}{2\pi} \delta(z-h) = 0, \quad (13c)$$

$$\lambda_i \left(-\xi^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \Theta - \frac{Q_h}{2\pi} \delta(z-h) = 0, \quad (13d)$$

式中參數 $\eta = (1-\nu)/(1-2\nu)$ ；函數 U_r 、 U_z 、 P 、 Θ 分別定義為：

$$U_r(z; \xi) = \int_0^{\infty} r u_r(r, z) J_1(\xi r) dr, \quad (14a)$$

$$U_z(z; \xi) = \int_0^{\infty} r u_z(r, z) J_0(\xi r) dr, \quad (14b)$$

$$P(z; \xi) = \int_0^{\infty} r p(r, z) J_0(\xi r) dr, \quad (14c)$$

$$\Theta(z; \xi) = \int_0^{\infty} r \vartheta(r, z) J_0(\xi r) dr. \quad (14d)$$

上式之 Hankel 反轉換則定義為：

$$u_r(r, z) = \int_0^{\infty} \xi U_r(z; \xi) J_1(\xi r) d\xi, \quad (15a)$$

$$u_z(r, z) = \int_0^{\infty} \xi U_z(z; \xi) J_0(\xi r) d\xi, \quad (15b)$$

$$p(r, z) = \int_0^{\infty} \xi P(z; \xi) J_0(\xi r) d\xi, \quad (15c)$$

$$\vartheta(r, z) = \int_0^{\infty} \xi \Theta(z; \xi) J_0(\xi r) d\xi. \quad (15d)$$

同理，引用式(1)與式(2a)-(2d)，並作適當之積分運算，則式(11a)-(11d)與式(12a)-(12d)所示之 Hankel 積分轉換域的邊界條件可繼續化簡為：

$$\frac{dU_r(0; \xi)}{dz} - \xi U_z(0; \xi) = 0, \quad (16a)$$

$$(\eta-1)\xi U_r(0; \xi) + \eta \frac{dU_z(0; \xi)}{dz} - (3\eta-2)\alpha_s \Theta(0; \xi) = 0, \quad (16b)$$

$$P(0; \xi) = 0, \quad (16c)$$

$$\Theta(0; \xi) = 0, \quad (16d)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} U_r(z; \xi) \rightarrow 0, \quad (17a)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} U_z(z; \xi) \rightarrow 0, \quad (17b)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P(z; \xi) \rightarrow 0, \quad (17c)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Theta(z; \xi) \rightarrow 0. \quad (17d)$$

式(13a)-(13d)係聯立之非齊性常微分方程式 (Non-homogeneous Ordinary Differential Equation)，可利用解這類微分方程式的標準方法推求其通解 (General Solution)。通解係由齊性解 (Homogeneous Solution) 與非齊性解 (Non-homogeneous Solution) 所組成，經解析後，式(13a)-(13d)之通解如以下所示：

$$U_r = (A_1 + A_2 z) e^{\xi z} + (A_5 + A_6 z) e^{-\xi z} - \frac{1}{16\pi\eta} \left[\frac{2(3\eta-2)\alpha_s Q_h}{\lambda_r} + \frac{\gamma_w Q_w}{kG} \right] \left[\frac{|z-h|}{\xi} + \frac{1}{\xi^2} \right] e^{-\xi|z-h|}, \quad (18a)$$

$$U_z = \left[-A_1 + \frac{2\eta+1}{2\eta-1} \frac{1}{\xi} A_2 + \frac{2(3\eta-2)\alpha_s}{2\eta-1} \frac{1}{\xi} A_3 + \frac{1}{(2\eta-1)G} \frac{1}{\xi} A_4 \right] e^{\xi z} - A_2 z e^{-\xi z} + \left[A_5 + \frac{2\eta+1}{2\eta-1} \frac{1}{\xi} A_6 - \frac{2(3\eta-2)\alpha_s}{2\eta-1} \frac{1}{\xi} A_7 - \frac{1}{(2\eta-1)G} \frac{1}{\xi} A_8 \right] e^{\xi z} + A_6 z e^{-\xi z} - \frac{1}{16\pi\eta} \left[\frac{2(3\eta-2)\alpha_s Q_h}{\lambda_r} + \frac{\gamma_w Q_w}{kG} \right] \frac{z-h}{\xi} e^{-\xi|z-h|}, \quad (18b)$$

$$P = A_4 e^{\xi z} + A_8 e^{-\xi z} + \frac{\gamma_w Q_w}{4\pi k} \frac{1}{\xi} e^{-\xi|z-h|}, \quad (18c)$$

$$\Theta = A_3 e^{\xi z} + A_7 e^{-\xi z} + \frac{Q_h}{4\pi\lambda_r} \frac{1}{\xi} e^{-\xi|z-h|}. \quad (18d)$$

將式(18a)-(18d)代入邊界條件方程式(16a)-(16d)與(17a)-(17d)，即可求出式(18a)-(18d)中之係數 $A_i (i=1, \dots, 8)$ 。經整理後，式(18a)-(18d)可進一步改寫為：

$$U_r = -\frac{1}{16\pi\eta} \left[\frac{2(3\eta-2)\alpha_s Q_h}{\lambda_r} + \frac{\gamma_w Q_w}{kG} \right] \left[\left(\frac{|z-h|}{\xi} + \frac{1}{\xi^2} \right) e^{-\xi|z-h|} + \left(-\frac{1}{\xi^2} + \frac{2\eta+1}{2\eta-1} \frac{h}{\xi} - \frac{z}{\xi} - 2hz \right) e^{-\xi(z+h)} \right], \quad (19a)$$

$$U_z = -\frac{1}{16\pi\eta} \left[\frac{2(3\eta-2)\alpha_s Q_h}{\lambda_r} + \frac{\gamma_w Q_w}{kG} \right] \left[\frac{z-h}{\xi} e^{-\xi|z-h|} + \left(-\frac{2\eta+1}{2\eta-1} \frac{h}{\xi} - \frac{z}{\xi} - 2hz \right) e^{-\xi(z+h)} \right], \quad (19b)$$

$$P = \frac{\gamma_w Q_w}{4\pi k} \frac{1}{\xi} \left[e^{-\xi(z+h)} - e^{-\xi|z-h|} \right], \quad (19c)$$

$$\Theta = \frac{Q_h}{4\pi\lambda_r \xi} \left[e^{-\xi(z+h)} - e^{-\xi|z-h|} \right]. \quad (19d)$$

最後再引用式(15a)-(15d)及數學使用手冊 (Abramowitz 與 Stegun, 1970), 作 Hankel 積分反轉換, 即可推導出溫泉地層受點狀抽水作用所引致之溫泉地層的水平位移暨垂直位移、超額孔隙水壓、及地層溫度變化量等之穩態閉合解, 如以下所示:

$$u_r(r, z) = \frac{(1-2\nu)\gamma_w Q_w}{16\pi(1-\nu)Gk} \left[-\frac{r}{R_1} + \frac{r}{R_2^*} - (3-4\nu) \frac{rh}{R_2 R_2^*} + \frac{rz}{R_2 R_2^*} + \frac{2hrz}{R_2^3} \right] + \frac{(1+\nu)\alpha_r Q_h}{8\pi(1-\nu)\lambda_r} \left[-\frac{r}{R_1} + \frac{r}{R_2^*} - (3-4\nu) \frac{rh}{R_2 R_2^*} + \frac{rz}{R_2 R_2^*} + \frac{2hrz}{R_2^3} \right], \quad (20a)$$

$$u_z(r, z) = \frac{(1-2\nu)\gamma_w Q_w}{16\pi(1-\nu)Gk} \left[-\frac{z-h}{R_1} + (3-4\nu) \frac{h}{R_2} + \frac{z}{R_2} + \frac{2hz(z+h)}{R_2^3} \right] + \frac{(1+\nu)\alpha_r Q_h}{8\pi(1-\nu)\lambda_r} \left[-\frac{z-h}{R_1} + (3-4\nu) \frac{h}{R_2} + \frac{z}{R_2} + \frac{2hz(z+h)}{R_2^3} \right], \quad (20b)$$

$$p(r, z) = \frac{\gamma_w Q_w}{4\pi k} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right), \quad (20c)$$

$$g(r, z) = \frac{Q_h}{4\pi\lambda_r} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right), \quad (20d)$$

式中符號 $R_1 = \sqrt{r^2 + (z-h)^2}$ 、 $R_2 = \sqrt{r^2 + (z+h)^2}$ 、 $R_2^* = \sqrt{r^2 + (z+h)^2} + z+h$ 。若欲瞭解溫泉抽水所引致之地表之水平位移量暨垂直位移量, 則只需將代表地表位置之座標變數 $z=0$ 代入式(20a)與式(20b)即可。基於此, 所研討出之溫泉抽水引致之地表水平位移暨垂直位移為:

$$u_r(r, 0) = \frac{(1-2\nu)\gamma_w Q_w}{16\pi(1-\nu)Gk} \left[-\frac{r}{R} + \frac{r}{R^*} - (3-4\nu) \frac{rh}{RR^*} \right] + \frac{(1+\nu)\alpha_r Q_h}{8\pi(1-\nu)\lambda_r} \left[-\frac{r}{R} + \frac{r}{R^*} - (3-4\nu) \frac{rh}{RR^*} \right], \quad (21a)$$

$$u_z(r, 0) = \frac{(1-2\nu)\gamma_w Q_w}{4\pi Gk} \frac{h}{R} + \frac{(1+\nu)\alpha_r Q_h}{2\pi\lambda_r} \frac{h}{R}, \quad (21b)$$

其中變數 $R = \sqrt{r^2 + h^2}$ 、 $R^* = \sqrt{r^2 + h^2} + h$ 。式(21a)為溫泉抽水所引致之地表水平位移公式, 式(21b)則為溫泉抽水所引致之地表沉陷量計算公式, 只要知道溫泉地層之波松比 ν (無單位)、剪力模數 G (單位: N/m^2)、滲透係數 k (單位: m/s)、線性熱膨脹係數 α_r (單位: $1/^\circ C$)、熱傳導係數 λ_r (單位: $J/sm^\circ C$) 等地層參數, 並曉得溫泉抽水深度 h (單位: m)、溫泉抽水量 Q_w (單位: m^3/s)、溫泉水 Q_w 中之熱能含量 Q_h (單位: J/s)、觀測點與沉降中心相隔之距離 r (單位: m) 等相關參數, 即可應用式(21a)與式(21b), 計算出溫泉抽水所引致之地表水平位移量及地表沉陷量。

四、結語

本文旨在探討等向性多孔隙飽和溫泉地層因單點抽水所引致的地層水平位移、垂直位移、超額孔隙水壓與地層溫度變化量等，如式(20a)-(20d)所示。此外，亦研討出溫泉抽水所引致之地表面水平位移與垂直位移，如式(21a)與式(21b)所示。研討過程乃根據 Biot 的多孔介質壓密沉陷理論建立基本方程式，再以 Hankel 積分轉換方法等推求問題之解，所研討出之解為穩態閉合解。為驗證各項研究成果之正確性，作者曾將所推導出之結果，以數值方法繪製數值結果，依圖形變化趨勢判斷其正確性，並將所研討出之閉合解，代回組成律、變位諧和條件、及力平衡方程式等基本方程式中，以確保所研討出之結果正確無誤。本文之研究成果，可據以計算出溫泉抽水所引起之地表沉陷量，亦可作為研討非點狀溫泉抽水等相關問題之基礎。

五、誌謝

本文係在國科會計畫 NSC-93-2625-Z-216-001 補助下所完成，特此申謝。

參考文獻

- Abramowitz, M., and Stegun, I.A., Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Dover Publications, Inc., New York, 1970.
- Al-Nimr, M., and Naji, M., "The Hyperbolic Heat Conduction Equation in an Anisotropic Material," *Heat and Mass Transfer*, Vol. 35, pp. 493-497, 1999.
- Amadei, B., Savage, W.Z., and Swolfs, H.S., "Gravitational Stresses in Anisotropic Rock Masses," *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech.*, Vol. 24, pp. 293-312, 1987.
- Aversa, S., and Evangelista, A., "Thermal Expansion of Neapolitan Yellow Tuff," *Rock Mech. Rock Engng.*, Vol. 26, pp. 281-306, 1993.
- Bear, J., and Corapcioglu, M.Y., "Mathematical Model for Regional Land Subsidence Due to Pumping, 2, Integrated Aquifer Subsidence Equations for Vertical and Horizontal Displacements," *Water Resources Research*, Vol. 17, pp. 947-958, 1981.
- Biot, M.A., "General Theory of Three-dimensional Consolidation," *Journal of Applied Physics*, Vol. 12, pp. 155-164, 1941.
- Biot, M.A., "Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid," *Journal of Applied Physics*, Vol. 26, pp. 182-185, 1955.
- Booker, J.R., and Carter, J.P., "Long Term Subsidence Due to Fluid Extraction from a Saturated, Anisotropic, Elastic Soil Mass," *Q. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 39, No. 1, pp. 85-97, 1986a.
- Booker, J.R., and Carter, J.P., "Analysis of a Point Sink Embedded in a Porous Elastic Half Space," *International Journal for the Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 10, No. 2, pp. 137-150, 1986b.

$$\begin{aligned}
& + \tan^{-1} \frac{2x(y+a)[x^2 + (\mu_i z \pm \mu_j h)^2 + (\mu_i z \pm \mu_j h)R_{(a, \mu_i z \pm \mu_j h)}]}{[x^2 + (\mu_i z \pm \mu_j h)^2 + (\mu_i z \pm \mu_j h)R_{(a, \mu_i z \pm \mu_j h)}]^2 - x^2(y+a)^2} \\
& - \tan^{-1} \frac{2x(y-a)[x^2 + (\mu_i z \pm \mu_j h)^2 + (\mu_i z \pm \mu_j h)R_{(-a, \mu_i z \pm \mu_j h)}]}{[x^2 + (\mu_i z \pm \mu_j h)^2 + (\mu_i z \pm \mu_j h)R_{(-a, \mu_i z \pm \mu_j h)}]^2 - x^2(y-a)^2} \Bigg\} , \\
& (i, j=1,2,3) ;
\end{aligned}$$

式中 $R_{(a, \mu_i z \pm \mu_j h)} = \sqrt{x^2 + (y+a)^2 + (\mu_i z \pm \mu_j h)^2}$, $R_{(-a, \mu_i z \pm \mu_j h)} = \sqrt{x^2 + (y-a)^2 + (\mu_i z \pm \mu_j h)^2}$ 。
若考慮地層的力學性質、熱流性質與滲流性質均為等向性，則式(14a)-(14e)可化簡為：

$$\begin{aligned}
u_x = & \frac{(1+\nu)\alpha_s q}{8\pi(1-\nu)\lambda_r} \left\{ x \ln \frac{R_{(a,-h)}^* R_{(-a,h)}^*}{R_{(-a,-h)}^* R_{(a,h)}^*} + [x - (1-2\nu)h]F \right. \\
& \left. - \frac{2hxz}{x^2 + (z+h)^2} \left[\frac{y+a}{R_{(a,h)}} - \frac{y-a}{R_{(-a,h)}} \right] \right\} , \quad (15a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_y = & \frac{(1+\nu)\alpha_s q}{8\pi(1-\nu)\lambda_r} \left\{ R_{(a,-h)} + R_{(-a,h)} - R_{(-a,-h)} - R_{(a,h)} + 4(1-\nu)h \ln \frac{R_{(a,h)} + z+h}{R_{(-a,h)} + z+h} \right. \\
& \left. - \frac{2hz}{R_{(-a,h)}} + \frac{2hz}{R_{(a,h)}} \right\} , \quad (15b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_z = & \frac{(1+\nu)\alpha_s q}{8\pi(1-\nu)\lambda_r} \left\{ (z-h) \ln \frac{R_{(a,-h)}^*}{R_{(-a,-h)}^*} - [(3-4\nu)h+z] \ln \frac{R_{(a,h)}^*}{R_{(-a,h)}^*} \right. \\
& \left. - \frac{2hz(z+h)}{x^2 + (z+h)^2} \left[\frac{y+a}{R_{(a,h)}} - \frac{y-a}{R_{(-a,h)}} \right] \right\} , \quad (15c)
\end{aligned}$$

$$p=0 , \quad (15d)$$

$$g = \frac{q}{4\pi\lambda_r} \ln \frac{R_{(a,-h)}^* R_{(-a,h)}^*}{R_{(-a,-h)}^* R_{(a,h)}^*} , \quad (15e)$$

其中 α_s 與 λ_r 分別為等向性地層之線性熱膨脹係數與熱傳導係數；函數 F 、 $R_{(a,h)}$ 、 $R_{(-a,h)}$ 、 $R_{(a,-h)}$ 、 $R_{(-a,-h)}$ 、 $R_{(a,h)}^*$ 、 $R_{(-a,h)}^*$ 、 $R_{(a,-h)}^*$ 、 $R_{(-a,-h)}^*$ 係定義為：

$$\begin{aligned}
F = & \tan^{-1} \frac{2x(y+a)[x^2 + (z+h)^2 + (z+h)R_{(a,h)}]}{[x^2 + (z+h)^2 + (z+h)R_{(a,h)}]^2 - x^2(y+a)^2} + \tan^{-1} \frac{2x(y+a)}{x^2 - (y+a)^2} - \tan^{-1} \frac{2x(y-a)}{x^2 - (y-a)^2} \\
& + \tan^{-1} \frac{2x(y-a)[x^2 + (z+h)^2 + (z+h)R_{(-a,h)}]}{[x^2 + (z+h)^2 + (z+h)R_{(-a,h)}]^2 - x^2(y-a)^2} + \tan^{-1} \frac{y+a}{x} - \tan^{-1} \frac{y-a}{x} ,
\end{aligned}$$

$$R_{(a,h)} = \sqrt{x^2 + (y+a)^2 + (z+h)^2} , \quad R_{(-a,h)} = \sqrt{x^2 + (y-a)^2 + (z+h)^2} ,$$

$$R_{(a,-h)} = \sqrt{x^2 + (y+a)^2 + (z-h)^2}, \quad R_{(-a,-h)} = \sqrt{x^2 + (y-a)^2 + (z-h)^2}, \quad R_{(a,h)}^* = R_{(a,h)} + y + a,$$

$$R_{(-a,h)}^* = R_{(-a,h)} + y - a, \quad R_{(a,-h)}^* = R_{(a,-h)} + y + a, \quad R_{(-a,-h)}^* = R_{(-a,-h)} + y - a.$$

茲針對等向性地層受水平溫泉管線作用之結果繪製相關圖形，選擇無因次化位移所需之基準量 $u_0 = (1+\nu)\alpha_1 qa/8\pi(1-\nu)\lambda_1$ ，以及無因次化溫度所需之基準量 $\vartheta_0 = q/4\pi\lambda_1$ 。再考慮溫泉管熱源深度 h 與溫泉管線熱源長度 $2a$ 之一半的比值 h/a 為 1，繪製半無限域地層中之地表垂直位移分佈曲線與地層等溫線分佈圖等，所研討出之結果如圖 3 與圖 4 所示。應用式(15a)-(15e)，可繼續繪製其他相關之圖表，以供工程分析設計之用。

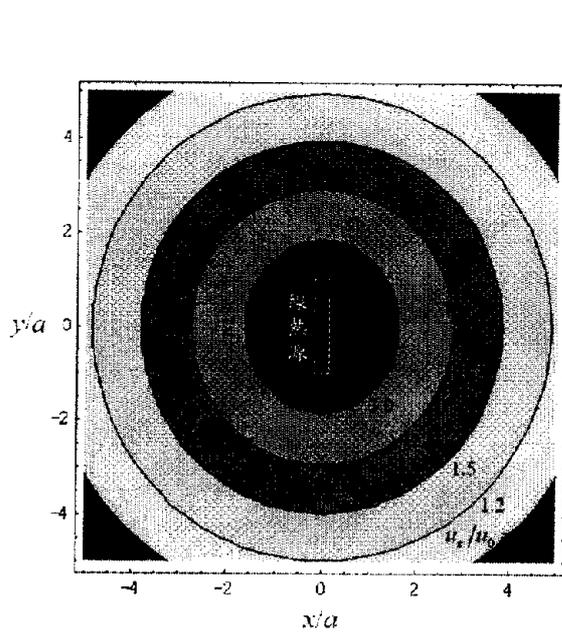


圖 3 地表無因次化垂直位移 u_z/u_0 分佈圖
(考慮無因次化溫泉管線熱源深度 $h/a = 1$ ，
無因次化位移之基準量
 $u_0 = (1+\nu)\alpha_1 qa/8\pi(1-\nu)\lambda_1$)

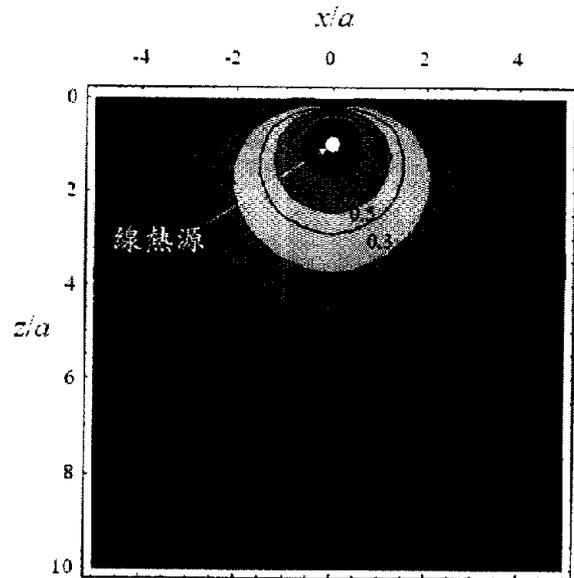


圖 4 在 $y=0$ 斷面上之無因次化地層等溫線分佈圖(考慮無因次化溫泉管線熱源深度 $h/a = 1$ ，無因次化溫度之基準量 $\vartheta_0 = q/4\pi\lambda_1$)

五、結論

本文旨在探討均質之橫向等向性半無限域地層受長度為 $2a$ 的水平溫泉管線作用所引致之地層位移、超額孔隙水壓、及地層溫度變化量等之穩態閉合解。研討過程乃根據已研討出之點熱源引致的半無限域地層力學行為變化等之基本解，進一步作適當之線積分，以研討出水平溫泉管線熱源作用於地層所引致之地層力學行為變化量等之解。

為驗證各項研究成果之正確性，本文除以數值方法，驗算各種力學行為變化量之合理性，並依圖形變化趨勢判斷其正確性。另一種檢驗方法，係將所研討出之閉合解，代回組成律、變位諧和條件、及力平衡方程式等基本方程式中，以確保所研討出之結果正確無誤。本文之研究成果，可作為研討溫泉管線對地層力學行為變化之影響的基礎。

六、誌謝

本文係在國科會計畫 NSC-93-2625-Z-216-001 補助下所完成，特此申謝。

參考文獻

- Abramowitz, M., and Stegun, I.A., Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Dover Publications, Inc., New York, 1970.
- Al-Nimr, M., and Naji, M., "The Hyperbolic Heat Conduction Equation in an Anisotropic Material," *Heat and Mass Transfer*, Vol. 35, pp. 493-497, 1999.
- Amadei, B., Savage, W.Z., and Swolfs, H.S., "Gravitational Stresses in Anisotropic Rock Masses," *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech.*, Vol. 24, pp. 293-312, 1987.
- Aversa, S., and Evangelista, A., "Thermal Expansion of Neapolitan Yellow Tuff," *Rock Mech. Rock Engng.*, Vol. 26, pp. 281-306, 1993.
- Biot, M.A., "General Theory of Three-dimensional Consolidation," *Journal of Applied Physics*, Vol. 12, pp. 155-164, 1941.
- Biot, M.A., "Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid," *Journal of Applied Physics*, Vol. 26, pp. 182-185, 1955.
- Booker, J.R., and Savvidou, C., "Consolidation Around a Spherical Heat Source," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 20, pp. 1079-1090, 1984.
- Booker, J.R., and Savvidou, C., "Consolidation Around a Point Heat Source," *International Journal for the Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 9, pp. 173-184, 1985.
- Lu, C.C., "Analysis of Consolidation Due to a Point Heat Source in an Anisotropic Porous Elastic Half Space," *The Sixth East Asian-Pacific Conference on Structural Engineering and Construction*, 14-16, January, Taipei, Taiwan, ROC., pp.1799-1804, 1998.
- Savvidou, C., and Booker, J.R., "Consolidation Around a Heat Source Buried Deep in a Porous Thermoelastic Medium with Anisotropic Flow Properties," *International Journal for the Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 13, No. 1, pp. 75-90 1989.
- Schiffman, R.L., "A Thermoelastic Theory of Consolidation," Environmental and Geophysical Heat Transfer, C.J. Cremers, *et al.*,(eds.), ASME, Vol.4, New York, pp.78-84, 1971.
- Terzaghi, K., Theoretical Soil Mechanics, John Wiley & Sons, New York, 1943.

以下論文已發表，論文基本資料如下：

呂志宗、林鳳彩，2004/11/26-27，「單點抽水引致的半無限域地表沉陷之暫態基本解」，中國機械工程學會第二十一屆全國學術研討會論文集，第 1105-1110 頁。(本文係在國科會研究計畫 NSC93-2625-Z-216-001 補助下所完成。)

單點抽水引致的半無限域地表沉陷之暫態基本解

呂志宗¹ 林鳳彩²

¹中華大學土木工程學系

²國立高雄海洋科技大學造船工程系

國科會計畫編號：NSC-93-2625-Z-216-001

摘要

本文基於 Biot 所建立之三維壓密理論，考慮地層為完全飽和之多孔介質，且地下水補注充分。抽水時，由於滲流影響，形成負的超額孔隙水壓力，因而地層中作用於孔隙水之應力逐漸轉移至土壤固體顆粒上，作用於固體土粒之有效應力增加，形成壓密沉陷。基於此，引用適當的積分方法，分別研討出以穩定速率作點抽水所引起的壓密沉陷之暫態閉合解，用以討論地表沉陷量等，使有助於了解抽水對地層下陷所造成的影響。

關鍵字：半無限域，多孔介質，點抽水，暫態解

1. 前言

抽水引致之地層下陷的行為變化至今仍廣受重視。當地下水自含水層中被抽出時，土壤中作用於孔隙水之壓應力會逐漸轉移至土壤顆粒上，土壤形成壓密現象，而導致地層下陷。

Terzaghi[1] 首先引用有效應力觀念 (Effective Stress Concept) 說明土壤的單向度壓密過程，其理論模式中，係先計算出孔隙水壓力，再推導出地層之壓密沉陷量，故稱之為非耦合 (Uncoupled) 壓密模式。然而 Biot[2、3] 所提出的三維壓密理論，係考慮孔隙水的平衡過程與土壤固體直接相關，所得出之結果亦被證實較為合理可靠。本文係引用 Terzaghi[1] 的非耦合壓密觀念，以及 Biot[2、3] 的三維壓密思維，建立問題之基本方程式。

基於 Biot[2、3] 的三維壓密理論模式，Bear 與 Corapcioglu[4、5] 以地下水流動觀點，分別研討並解析受限含水層 (Confined Aquifer) 與非受限含水層

(Unconfined Aquifer) 中因大區域抽水所引致之壓密沉陷問題；Safai 與 Pinder[6、7] 曾以有限元素法解析不飽和土層中之抽水所引致的壓密沉陷；Lewis 與 Schrefler[8、9] 則應用有限元素法作義大利威尼斯城的個案研究；Yeh 等人[10] 亦曾以有限元素法研討地層下陷問題。Booker 與 Carter[11、12]、Tarn 與 Lu[13] 亦曾研討出汲水引致之地層壓密問題之閉合解 (Closed-Form Solution)，並探討地表邊界條件與地層異向性對地層壓密沉陷的影響。在 Tarn 與 Lu[13] 的研究中，是以抽水點模擬抽水現象。本文係根據 Tarn 與 Lu[13] 的研究成果，所進行之後續相關研究。所研討出之解，為單點抽水所引致壓密沉陷之暫態 (Transient) 閉合解。

本文將地表面模擬一半無限域 (Half-Space)，而地層力學性質與土壤之滲流性質皆考慮為等向性 (Isotropic)。地表邊界是模擬為完全透水情況，以在地表下深度 h 位置，有一點抽水源模擬單井抽水的現象。仍考慮土層由飽和含水土壤構成，且地下水補注充分，所得出之結果，可對抽水所引致之與時間有關的地表沉陷問題有更深入的瞭解。

2. 點抽水問題之數學模式

2.1 多孔介質彈性力學理論

2.1.1 介質位移與孔隙流體壓力方程式

本文係引用多孔介質彈性力學理論建立基本方程式，探討如圖一所示半無限域多孔隙地層受點抽水作用問題之數學模式及其暫態閉合解。多孔隙地層在受外力作用或流體流動時，都會造成多孔隙地層本身物理量的改變，例如其體積、應力、超額孔隙水壓等均會產生變化。茲以微小之代表性元素體分析多孔隙地層

之力平衡以及質量守恆等方程式。若讓座標 z 軸通過點抽水源，則問題可考慮為軸對稱。多孔隙地層之應變 ε_{ij} ($i, j = r, \theta, z$) 與位移 (u_r, u_θ, u_z) 的線性關係式，可以軸對稱圓柱座標 (r, z) 表為：

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (1)$$

因問題為軸對稱，故環向位移 $u_\theta = 0$ 。令作用於多孔隙地層之總應力(Total Stress)為 τ_{ij} (張力為正)、有效應力(Effective Stress)為 σ'_{ij} (張力為正)、超額孔隙水壓力為 p (壓力為正)，再根據 Terzaghi[1]的有效應力觀念 $\tau_{ij} = \sigma'_{ij} - p\delta_{ij}$ (δ_{ij} 為 Kronecker delta)，則：

$$\tau_{rr} = \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}\varepsilon_{rr} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{zz} - p \quad (2a)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{rr} + \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{zz} - p \quad (2b)$$

$$\tau_{zz} = \frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{rr} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}\varepsilon_{zz} - p \quad (2c)$$

$$\tau_{rz} = 2G\varepsilon_{rz} \quad (2d)$$

其中 $G = E/2(1+\nu)$ 為多孔隙飽和地層之剪力模數 (Shear Modulus)， E 是多孔隙飽和地層之楊氏係數 (Young's Modulus)； ν 係多孔隙飽和地層之波松比 (Poisson's Ratio)。

作用於多孔隙飽和地層之總應力需滿足力平衡方程式 $\tau_{ij,j} + f_i = 0$ ，亦即：

$$\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + f_r = 0 \quad (3a)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 \quad (3b)$$

若不考慮微體力 (Body Force) f_i ($i = r, z$) 的影響，並考慮 Terzaghi[1]的有效應力觀念，先將式(1)代入式(2a)-(2d)，再將式(2a)-(2d)代入力平衡方程式(3a)、(3b)中，則軸對稱多孔介質彈性力學問題之基本方程式可以多孔隙地層之位移量 u_i 和超額孔隙水壓 p 等表為：

$$G\nabla^2 u_r + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} - G \frac{u_r}{r^2} - \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (4a)$$

$$G\nabla^2 u_z + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (4b)$$

其中 $\nabla^2 = \partial^2/\partial r^2 + 1/r \partial/\partial r + \partial^2/\partial z^2$ ；多孔隙飽和地層之體積應變量 $\varepsilon = \partial u_r/\partial r + u_r/r + \partial u_z/\partial z$ 。

2.1.2 流量連續方程式

本文將多孔隙飽和地層模擬為等向性之線彈性多孔介質，其中孔隙流體的流動之擴散傳輸等需遵守質量守恆定律，如以下所示：

$$\nabla \cdot [n(v_w - v_s)] + n\beta \frac{\partial p}{\partial t} + q_w = 0 \quad (5)$$

其中 v_s 與 v_w 分別為固體介質與孔隙流體之位移速度； n 是多孔介質的孔隙率 (Porosity)； q_w 是作用於多孔隙地層內部的抽水強度。

地層中之孔隙水的流動需滿足 Darcy 定律：

$$n(v_w - v_s) = -\frac{k}{\gamma_w} \left(\frac{\partial p}{\partial r} i_r + \frac{\partial p}{\partial z} i_z \right) \quad (6)$$

式中 k 為多孔隙地層之滲透係數； γ_w 是孔隙水之單位重 (Unit Weight)。

將方程式(6)代入方程式(5)，並考慮有一個強度為 Q (m^3/s) 之點抽水源作用在座標 $(0, h)$ 上，則可推得另一個基本控制方程式如下：

$$-\frac{k}{\gamma_w} \nabla^2 p + n\beta \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Q}{2\pi r} \delta(r) \delta(z-h) u(t) = 0 \quad (7)$$

式中 $\delta(x)$ 是 Dirac delta 函數； $u(t)$ 是單位階梯函數 (Heaviside Unit Step Function)。式(4a)、式(4b)與式(7)組成問題之基本控制方程式。

2.2 邊界條件與初始條件

茲考慮在地表邊界位置 ($z=0$) 上無應力變化且無孔隙水壓變化 (透水情況)，因此在此邊界上之邊界條件可表為：

$$\sigma'_{rz}(r, 0, t) = 0, \sigma'_{zz}(r, 0, t) = 0, p(r, 0, t) = 0 \quad (8)$$

在無限深遠處 ($z \rightarrow \infty$)，其多孔介質位移和超額孔隙水壓等應不會受點抽水的影響。所以無限深遠處之邊界條件可表為：

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \{u_r(r, z, t), u_z(r, z, t), p(r, z, t)\} \rightarrow \{0, 0, 0\} \quad (9)$$

問題之初始條件是考慮為各種物理變化量在 $t=0$ 時，其值均為零，亦即：

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \{u_r(r, z, t), u_z(r, z, t), p(r, z, t)\} \rightarrow \{0, 0, 0\} \quad (10)$$

本文將引用積分轉換方法 (Integral Transform) 解析所建立之數學模式，所研討出之解為與時間有關之暫態基本解。

3. 無因次化數學模式

茲令土壤的臨界破壞剪應力 σ_0 為特徵應力 (Characteristic Stress)，並令抽水深度 h 為特徵長度 (Characteristic Length)，而特徵位移量 (Characteristic Displacement) u_0 為 $u_0 = \sigma_0 h / G$ ， $t_0 = \gamma_w h^2 / k \sigma_0$ 為特徵時間 (Characteristic Time)。然後，再將座標變數

(r, z) 、時間變數 t 、地層位移 (u_r, u_z) 、超額孔隙水壓力 p 等予以無因次化，如以下所示：

$$\hat{r} = \frac{r}{h}, \hat{z} = \frac{z}{h}, \hat{t} = \frac{t}{t_0}, \hat{u}_r = \frac{u_r}{u_0}, \hat{u}_z = \frac{u_z}{u_0}, \hat{p} = \frac{P}{\sigma_0} \quad (11)$$

基於此，基本方程式(4a)、(4b)與(7)可改為：

$$\hat{\nabla}^2 \hat{u}_r + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \hat{r}} - \frac{\hat{u}_r}{\hat{r}^2} - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{r}} = 0, \quad (12a)$$

$$\hat{\nabla}^2 \hat{u}_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \hat{z}} - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} = 0, \quad (12b)$$

$$-\hat{\nabla}^2 \hat{p} + n\beta\sigma_0 \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{t}} + \frac{Q't_0}{2\pi h \hat{r}} \delta(h\hat{r})\delta(h(\hat{z}-1))u(t_0\hat{t}) = 0, \quad (12c)$$

其中微分運算子 $\hat{\nabla}^2 = \partial^2/\partial \hat{r}^2 + 1/\hat{r} \partial/\partial \hat{r} + \partial^2/\partial \hat{z}^2$ ；符號 $\hat{\varepsilon} = \partial \hat{u}_r/\partial \hat{r} + \hat{u}_r/\hat{r} + \partial \hat{u}_z/\partial \hat{z}$ 。

式(8)與式(9)所示數學模式中之邊界條件亦應同時作無因次化轉換，如以下所示：

$$\hat{\sigma}'_r(\hat{r}, 0, \hat{t}) = 0, \hat{\sigma}'_z(\hat{r}, 0, \hat{t}) = 0, \hat{p}(\hat{r}, 0, \hat{t}) = 0, \quad (13a)$$

$$\lim_{\hat{z} \rightarrow \infty} \{\hat{u}_r(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}), \hat{u}_z(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}), \hat{p}(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t})\} \rightarrow \{0, 0, 0\}, \quad (13b)$$

其中 $\hat{\sigma}'_r = \sigma'_r/\sigma_0$ 、 $\hat{\sigma}'_z = \sigma'_z/\sigma_0$ 。

另外，式(10)之初始條件亦應調整為：

$$\lim_{\hat{t} \rightarrow 0^+} \{\hat{u}_r(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}), \hat{u}_z(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}), \hat{p}(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t})\} \rightarrow \{0, 0, 0\} \quad (14)$$

式(12a)-(12c)、(13a)、(13b)與(14)即為無因次化後，單點抽水問題之數學模式。

4. 積分轉換解析

本文係引用積分變換方法解析如圖一所示點抽水問題之數學模式，所採用的方法為分別對變數 \hat{t} 、 \hat{r} 和 \hat{z} 作 Laplace 積分轉換、Hankel 積分轉換和 Fourier 積分轉換。首先引用式(14)所示之初始條件，對式(12a)、式(12b)與式(12c)中之變數 \hat{t} 進行 Laplace 積分轉換。基於此，可得：

$$\left[2\eta \left(\frac{\partial^2}{\partial \hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} - \frac{1}{\hat{r}^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \hat{z}^2} \right] U_r + (2\eta - 1) \frac{\partial^2 U_z}{\partial \hat{r} \partial \hat{z}} - \frac{\partial P}{\partial \hat{r}} = 0, \quad (15a)$$

$$(2\eta - 1) \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{\hat{r}} \right) U_r + \left(\frac{\partial^2}{\partial \hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} + 2\eta \frac{\partial^2}{\partial \hat{z}^2} \right) U_z - \frac{\partial P}{\partial \hat{z}} = 0, \quad (15b)$$

$$\left[- \left(\frac{\partial^2}{\partial \hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} + \frac{\partial^2}{\partial \hat{z}^2} \right) + n\beta\sigma_0 s \right] P$$

$$= - \frac{Q}{2\pi h \hat{r}} \delta(h\hat{r})\delta(h(\hat{z}-1)), \quad (15c)$$

式中 $\eta = (1-\nu)/(1-2\nu)$ 。式(13a)與式(13b)所示之邊界條件亦需作 Laplace 積分轉換，其結果如以下所示：

$$\Sigma'_r(\hat{r}, 0; s) = 0, \Sigma'_z(\hat{r}, 0; s) = 0, P(\hat{r}, 0; s) = 0, \quad (16a)$$

$$\lim_{\hat{z} \rightarrow \infty} \{U_r(\hat{r}, \hat{z}; s), U_z(\hat{r}, \hat{z}; s), P(\hat{r}, \hat{z}; s)\} \rightarrow \{0, 0, 0\}, \quad (16b)$$

式(15a)-(15c)與式(16a)、(16b)中之 $\{U_r, U_z, P, \Sigma'_r, \Sigma'_z\}$ 是 $\{\hat{u}_r, \hat{u}_z, \hat{p}, \hat{\sigma}'_r, \hat{\sigma}'_z\}$ 的 Laplace 積分轉換：

$$\begin{cases} U_r(\hat{r}, \hat{z}; s) \\ U_z(\hat{r}, \hat{z}; s) \\ P(\hat{r}, \hat{z}; s) \\ \Sigma'_r(\hat{r}, \hat{z}; s) \\ \Sigma'_z(\hat{r}, \hat{z}; s) \end{cases} = \int_0^\infty \begin{cases} \hat{u}_r(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}) \\ \hat{u}_z(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}) \\ \hat{p}(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}) \\ \hat{\sigma}'_r(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}) \\ \hat{\sigma}'_z(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}) \end{cases} e^{-s\hat{t}} d\hat{t}, \quad (17)$$

上式之 Laplace 積分反轉換係定義為：

$$\begin{cases} \hat{u}_r(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}) \\ \hat{u}_z(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}) \\ \hat{p}(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}) \\ \hat{\sigma}'_r(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}) \\ \hat{\sigma}'_z(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}) \end{cases} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \begin{cases} U_r(\hat{r}, \hat{z}; s) \\ U_z(\hat{r}, \hat{z}; s) \\ P(\hat{r}, \hat{z}; s) \\ \Sigma'_r(\hat{r}, \hat{z}; s) \\ \Sigma'_z(\hat{r}, \hat{z}; s) \end{cases} e^{s\hat{t}} ds. \quad (18)$$

再繼續分別對式(15a)-(15c)其中之變數 \hat{r} 進行 1 階、0 階與 0 階之 Hankel 積分轉換，可得：

$$\left(\frac{d^2}{d\hat{z}^2} - 2\eta\xi^2 \right) \tilde{U}_r - (2\eta - 1)\xi \frac{d\tilde{U}_z}{d\hat{z}} + \xi \tilde{P} = 0, \quad (19a)$$

$$(2\eta - 1)\xi \frac{\partial \tilde{U}_r}{\partial \hat{z}} + \left(2\eta \frac{d^2}{d\hat{z}^2} - \xi^2 \right) \tilde{U}_z - \frac{d\tilde{P}}{d\hat{z}} = 0, \quad (19b)$$

$$\left[- \left(\frac{d^2}{d\hat{z}^2} - \xi^2 \right) + n\beta\sigma_0 s \right] \tilde{P} = - \frac{Q t_0}{2\pi h^2 s} \delta(h(\hat{z}-1)), \quad (19c)$$

式(16a)與式(16b)所示問題之邊界條件中的六個項次，亦需分別進行 1 階、0 階、0 階、1 階、0 階、0 階之 Hankel 積分轉換：

$$\tilde{\Sigma}'_r(0; \xi, s) = 0, \tilde{\Sigma}'_z(0; \xi, s) = 0, \tilde{P}(0; \xi, s) = 0, \quad (20a)$$

$$\lim_{\hat{z} \rightarrow \infty} \{\tilde{U}_r(\hat{z}; \xi, s), \tilde{U}_z(\hat{z}; \xi, s), \tilde{P}(\hat{z}; \xi, s)\} \rightarrow \{0, 0, 0\}. \quad (20b)$$

式(19a)-(19c)暨式(20a)、(20b)中之 $\{\tilde{U}_r, \tilde{U}_z, \tilde{P}, \tilde{\Sigma}'_r, \tilde{\Sigma}'_z\}$ 係定義為：

$$\begin{cases} \tilde{U}_r(\hat{z}; \xi, s) \\ \tilde{U}_z(\hat{z}; \xi, s) \\ \tilde{P}(\hat{z}; \xi, s) \\ \tilde{\Sigma}'_r(\hat{z}; \xi, s) \\ \tilde{\Sigma}'_z(\hat{z}; \xi, s) \end{cases} = \int_0^\infty \hat{r} \begin{cases} U_r(\hat{r}, \hat{z}; s) J_1(\xi \hat{r}) \\ U_z(\hat{r}, \hat{z}; s) J_0(\xi \hat{r}) \\ P(\hat{r}, \hat{z}; s) J_0(\xi \hat{r}) \\ \Sigma'_r(\hat{r}, \hat{z}; s) J_1(\xi \hat{r}) \\ \Sigma'_z(\hat{r}, \hat{z}; s) J_0(\xi \hat{r}) \end{cases} d\hat{r}, \quad (21)$$

其反轉換則定義為：

$$\begin{cases} U_r(\hat{r}, \hat{z}; s) \\ U_z(\hat{r}, \hat{z}; s) \\ P(\hat{r}, \hat{z}; s) \\ \Sigma'_r(\hat{r}, \hat{z}; s) \\ \Sigma'_z(\hat{r}, \hat{z}; s) \end{cases} = \int_0^\infty \xi \begin{cases} \tilde{U}_r(\hat{z}; \xi, s) J_1(\xi \hat{r}) \\ \tilde{U}_z(\hat{z}; \xi, s) J_0(\xi \hat{r}) \\ \tilde{P}(\hat{z}; \xi, s) J_0(\xi \hat{r}) \\ \tilde{\Sigma}'_r(\hat{z}; \xi, s) J_1(\xi \hat{r}) \\ \tilde{\Sigma}'_z(\hat{z}; \xi, s) J_0(\xi \hat{r}) \end{cases} d\xi \quad (22)$$

式(19a)-(19c)係聯立常微分方程，其通解(General Solution) $\{\tilde{U}_r, \tilde{U}_z, \tilde{P}\}$ 是由齊性解(Homogeneous Solution) $\{\tilde{U}_{rh}, \tilde{U}_{zh}, \tilde{P}_h\}$ 與滿足非齊性項(Non-homogeneous Term)之非齊性解(Non-homogeneous Solution) $\{\tilde{U}_{rp}, \tilde{U}_{zp}, \tilde{P}_p\}$ 的和所組成。解析式(19a)-(19c)之齊性微分方程式部分，即可推導出問題之齊性解如以下所示：

$$\begin{aligned} \tilde{U}_m = & A_1 e^{\xi \hat{z}} + A_2 \hat{z} e^{\xi \hat{z}} + A_3 e^{-\xi \hat{z}} + A_4 \hat{z} e^{-\xi \hat{z}} \\ & + A_5 e^{\sqrt{\xi^2 + n\beta_0} \hat{z}} + A_6 e^{-\sqrt{\xi^2 + n\beta_0} \hat{z}}, \end{aligned} \quad (23a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{zh} = & \left(-A_1 + \frac{2\eta + 1}{2\eta - 1} \frac{1}{\xi} A_2 \right) e^{\xi \hat{z}} - A_2 \hat{z} e^{\xi \hat{z}} \\ & + \left(A_3 + \frac{2\eta + 1}{2\eta - 1} \frac{1}{\xi} A_4 \right) e^{-\xi \hat{z}} + A_4 \hat{z} e^{-\xi \hat{z}} \\ & - \frac{1}{\xi} \sqrt{\xi^2 + n\beta_0} A_5 e^{\sqrt{\xi^2 + n\beta_0} \hat{z}} \\ & + \frac{1}{\xi} \sqrt{\xi^2 + n\beta_0} A_6 e^{-\sqrt{\xi^2 + n\beta_0} \hat{z}}, \end{aligned} \quad (23b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_h = & -2\eta n \beta_0 s \frac{1}{\xi} A_5 e^{\sqrt{\xi^2 + n\beta_0} \hat{z}} \\ & - 2\eta n \beta_0 s \frac{1}{\xi} A_6 e^{-\sqrt{\xi^2 + n\beta_0} \hat{z}}, \end{aligned} \quad (23c)$$

其中係數 $A_i (i=1, \dots, 6)$ 是線性獨立的。

式(19a)-(19c)之非齊性解，可以利用 Fourier 積分轉換方法推導出。茲對式(19a)-(19c)中之變數 \hat{z} 進一步作 Fourier 積分轉換，可得：

$$-(\omega^2 + 2\eta\xi^2)\tilde{U}_{rp}^* - i(2\eta - 1)\xi\omega\tilde{U}_{zp}^* + \xi\tilde{P}_p^* = 0, \quad (24a)$$

$$i(2\eta - 1)\xi\omega\tilde{U}_{rp}^* - (2\eta\omega^2 + \xi^2)\tilde{U}_{zp}^* - i\omega\tilde{P}_p^* = 0, \quad (24b)$$

$$\left[(\omega^2 + \xi^2) + n\beta_0 s \right] \tilde{P}_p^* = -\frac{Q t_0}{2\pi h^3 s} e^{-i\omega}, \quad (24c)$$

其中 $\{\tilde{U}_{rp}^*, \tilde{U}_{zp}^*, \tilde{P}_p^*\}$ 係定義為：

$$\begin{cases} \tilde{U}_{rp}^* \\ \tilde{U}_{zp}^* \\ \tilde{P}_p^* \end{cases} = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{cases} \tilde{U}_{rp} \\ \tilde{U}_{zp} \\ \tilde{P}_p \end{cases} \exp(-i\omega \hat{z}) d\hat{z}, \quad (25)$$

其 Fourier 反轉換則定義為：

$$\begin{cases} \tilde{U}_{rp} \\ \tilde{U}_{zp} \\ \tilde{P}_p \end{cases} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{cases} \tilde{U}_{rp}^* \\ \tilde{U}_{zp}^* \\ \tilde{P}_p^* \end{cases} \exp(i\omega \hat{z}) d\omega. \quad (26)$$

解析式(24a)-(24c)可得：

$$\tilde{U}_{rp}^* = -\frac{Q t_0}{4\pi\eta h^3 s} \frac{\xi}{\omega^2 + \xi^2} \frac{e^{-i\omega}}{\omega^2 + \xi^2 + n\beta_0 s}, \quad (27a)$$

$$\tilde{U}_{zp}^* = \frac{Q t_0}{4\pi\eta h^3 s} \frac{i\omega}{\omega^2 + \xi^2} \frac{e^{-i\omega}}{\omega^2 + \xi^2 + n\beta_0 s}, \quad (27b)$$

$$\tilde{P}_p^* = -\frac{Q t_0}{2\pi h^3 s} \frac{e^{-i\omega}}{\omega^2 + \xi^2 + n\beta_0 s}. \quad (27c)$$

再引用式(26)，對式(27a)-(27c)作 Fourier 積分反轉換，可推導出式(19a)-(19c)之非齊性解：

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{rp} = & \frac{Q t_0}{8\pi\eta h^3 n\beta_0} \left\{ -\frac{1}{s^2} e^{-\xi|\hat{z}-1|} \right. \\ & \left. + \frac{\xi}{s^2 \sqrt{\xi^2 + n\beta_0 s}} e^{-\sqrt{\xi^2 + n\beta_0 s}|\hat{z}-1|} \right\}, \end{aligned} \quad (28a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{zp} = & \pm \frac{Q t_0}{8\pi\eta h^3 n\beta_0} \left\{ -\frac{1}{s^2} e^{-\xi|\hat{z}-1|} \right. \\ & \left. + \frac{1}{s^2} e^{-\sqrt{\xi^2 + n\beta_0 s}|\hat{z}-1|} \right\}, \end{aligned} \quad (28b)$$

$$\tilde{P}_p = -\frac{Q t_0}{4\pi h^3} \frac{1}{s \sqrt{\xi^2 + n\beta_0 s}} e^{-\sqrt{\xi^2 + n\beta_0 s}|\hat{z}-1|}. \quad (28c)$$

式(28b)中加減符號之上標表 $|\hat{z}-1| \geq 0$ ，下標表 $|\hat{z}-1| < 0$ ，後面相關之方程式中，若加減符號同時出現，亦遵守此一原則。式(23a)-(23c)分別加上式(28a)-(28c)，即為式(19a)-(19c)之通解，此通解需滿足式(20a)與式(20b)所示之邊界條件。將通解代入邊界條件之後，即可解出通解中之待定係數 $A_i (i=1, \dots, 6)$ ，故通解可改寫為：

$$\begin{aligned} \tilde{U}_r = & \frac{Q t_0}{8\pi\eta h^3 n\beta_0} \left[\left(-\frac{2\eta + 1}{2\eta - 1} + 2\xi\hat{z} \right) \frac{1}{s^2} e^{-\xi(\hat{z}+1)} \right. \\ & + \left(\frac{4\eta}{2\eta - 1} - 2\xi\hat{z} \right) \frac{1}{s^2} e^{-\xi\sqrt{\xi^2 + n\beta_0 s}} \\ & - \frac{\xi}{s^2 \sqrt{\xi^2 + n\beta_0 s}} e^{-\sqrt{\xi^2 + n\beta_0 s}(\hat{z}+1)} - \frac{1}{s^2} e^{-\xi|\hat{z}-1|} \\ & \left. + \frac{\xi}{s^2 \sqrt{\xi^2 + n\beta_0 s}} e^{-\sqrt{\xi^2 + n\beta_0 s}|\hat{z}-1|} \right], \end{aligned} \quad (29a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_z = & \frac{Q t_0}{8\pi\eta h^3 n\beta_0} \left[\left(\frac{2\eta + 1}{2\eta - 1} + 2\xi\hat{z} \right) \frac{1}{s^2} e^{-\xi(\hat{z}+1)} \right. \\ & \left. - \left(\frac{2}{2\eta - 1} + 2\xi\hat{z} \right) \frac{1}{s^2} e^{-\xi\sqrt{\xi^2 + n\beta_0 s}} \right] \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{s^2} e^{-\sqrt{s^2+n\beta\sigma_0 s}(z+1)} \mp \frac{1}{s^2} e^{-s|z-1|} \pm \frac{1}{s^2} e^{-\sqrt{s^2+n\beta\sigma_0 s}|z-1|} \quad (29b)$$

$$\tilde{p} = \frac{Qt_0}{4\pi h^3} \frac{1}{s\sqrt{s^2+n\beta\sigma_0 s}} \left[e^{-\sqrt{s^2+n\beta\sigma_0 s}(z+1)} - e^{-\sqrt{s^2+n\beta\sigma_0 s}|z-1|} \right] \quad (29c)$$

式(29a)-(29c)尚需引用式(18)與式(22)進行 Laplace 與 Hankel 積分反轉換運算。因 $\hat{z}=0$ 所對應之地表面的水平暨垂直位移最為重要，故可將式(29a)-(29c)中之變數 \hat{z} 代入 $\hat{z}=0$ ，然後執行 Laplace 與 Hankel 積分反轉換[14]。基於此，可得知：

$$\hat{u}_r(\hat{r}, 0, \hat{t}) = \frac{Qt_0}{2(2\eta-1)\pi h^3} \left\{ -\frac{c\hat{r}}{(1+\hat{r}^2)^{3/2}} + \frac{\hat{r}}{16} \int_0^{\hat{t}} \frac{c\hat{t}-\tau}{\tau^3} e^{-\frac{1+\hat{r}^2/2}{4\tau}} \left[I_0\left(\frac{\hat{r}^2}{8\tau}\right) - I_1\left(\frac{\hat{r}^2}{8\tau}\right) \right] d\tau \right\} \quad (30a)$$

$$\hat{u}_z(\hat{r}, 0, \hat{t}) = \frac{Qt_0}{2(2\eta-1)\pi h^3} \left\{ \frac{c\hat{t}}{(1+\hat{r}^2)^{3/2}} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\hat{r}^2}{c\hat{t}}}\right) - \frac{1}{1+\hat{r}^2} \sqrt{\frac{c\hat{t}}{\pi}} \exp\left(-\frac{1+\hat{r}^2}{4c\hat{t}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{1+\hat{r}^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\hat{r}^2}{c\hat{t}}}\right) \right\} \quad (30b)$$

其中 $c=1/n\beta\sigma_0$ ； $I_n(x)$ 為修正之 n 階的第一種類型 Bessel 函數； $\operatorname{erf}(x)$ 與 $\operatorname{erfc}(x)$ 分別為誤差函數(Error Function) 與 補誤差函數 (Complementary Error Function)。應用式(30a)與式(30b)所示之暫態解，即可計算出任意時刻地表面之水平暨垂直位移。

圖二是根據式(30a)所繪製的地表依時沉線曲線，只要引用式(11)中所示無因次化過程中之特徵長度 h 、特徵應力 σ_0 、特徵位移量 $u_0 = \sigma_0 h/G$ 、特徵時間 $t_0 = \gamma_w h^2/k\sigma_0$ 及地層剪力模數 G 、孔隙率 n 、滲透係數 k 、孔隙水單位重 γ_w 、孔隙水壓縮係數 β 、抽水量 Q 等，配合圖二所示之結果，即可計算出地表任意位置之依時沉陷量。

5. 結論

本文旨在探討等向性多孔隙飽和地層因單點抽水

所引致之地表水平暨垂直位移，研討過程乃根據 Terzaghi 與 Biot 的壓密沉陷理論，以積分轉換方法推求問題之解，所研討出之解為暫態閉合解。

為驗證各項研究成果之正確性，作者將所推導出之結果，以數值方法繪製數值結果，依圖形變化趨勢判斷其正確性，並將所研討出之閉合解，代回組成律、變位諧和條件、及力平衡方程式等基本方程式中，以確保所研討出之結果正確無誤。此外，亦曾調整時間變數為無限大，以討論地表面之長期水平暨垂直位移，並與文獻[13]中已知之結果相互比較，證明研討出之結果確實正確無誤。本文之研究成果，可作為研討非點抽水等相關問題之基礎，亦可據以計算地表之依時沉陷量。研究成果具有極高之研究與應用價值。

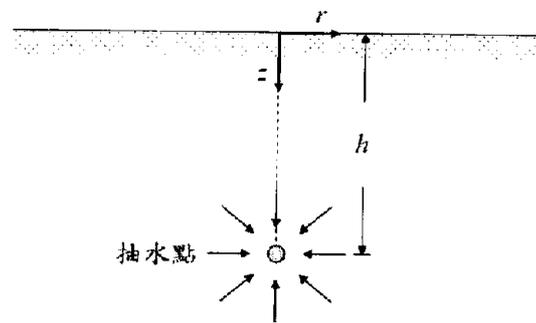
參考文獻

1. Terzaghi, K., *Theoretical Soil Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1943.
2. Biot, M.A., General theory of three-dimensional consolidation, *J. Appl. Phys.*, Vol. 12, pp. 155-164, 1941.
3. Biot, M.A., Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid, *J. Appl. Phys.*, Vol. 26, pp. 182-185, 1955.
4. Bear, J. and Corapcioglu, M.Y., Mathematical model for regional land subsidence due to pumping, 2, integrated aquifer subsidence equations for vertical and horizontal displacements, *Water Resources Research*, Vol. 17, pp. 947-958, 1981.
5. Corapcioglu, M.Y. and Bear, J., A mathematical model for regional land subsidence due to pumping, 3, integrated equations for a phreatic aquifer, *Water Resources Research*, Vol. 19, pp. 895-908, 1983.
6. Safai, N.M. and Pinder, G.F., Vertical and horizontal land deformation in a desaturating porous medium, *Advan. Water Resour.*, Vol. 2, No. 1, pp. 19-25, 1979.
7. Safai, N.M. and Pinder, G.F., Vertical and horizontal land deformation due to fluid withdrawal, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 4, pp. 131-142, 1980.
8. Lewis, R.W. and Schrefler, B.A., A fully coupled

- consolidation model of the subsidence of Venice, *Water Resources Research*, Vol. 14, No. 2, pp. 223-230, 1978.
- 9 · Lewis, R.W. and Schrefler, B.A., A finite element analysis of surface subsidence, in S.K. Saxena(ed.), *Evaluation and Prediction of Subsidence*, ASCE, New York, pp. 400-416, 1978.
 - 10 · Yeh, H.-D., Lu, R.-H. and Yeh, G.-T., Finite element modelling for land displacements due to pumping, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 20, pp. 79-99, 1996.
 - 11 · Booker, J.R. and Carter, J.P., Analysis of a point sink embedded in a porous elastic half space, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 10, No. 2, pp. 137-150, 1986.
 - 12 · Booker, J.R. and Carter, J.P., Long term subsidence due to fluid extraction from a saturated, anisotropic, elastic soil mass, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 39, No. 1, pp. 85-97, 1986.
 - 13 · Tarn, J.Q. and Lu, C.C., Analysis of subsidence due to a point sink in an anisotropic porous elastic half space, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 15, No. 8, pp. 573-592, 1991.
 - 14 · Abramowitz, M. and Stegun, I.A., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, Inc., New York, 1970.

theory of porous media, the transient land subsidence of a saturated elastic half-space containing a point sink due to fluid withdrawal is studied. As pumping of water from an aquifer takes place, the pore water pressure is reduced in the withdrawal region. This leads to an increase in the effective stress between the soil particles and subsidence of ground surface. The soil mass is modeled as isotropic porous media to simulate the earth medium. Closed-form solutions of the consolidation deformation are obtained by using the appropriate integral transform techniques. Results can provide a better understanding of the influence of pumping on the subsidence.

Keywords: half-space, porous medium, point sink, closed-form solution



圖一 點抽水問題示意圖

Transient Fundamental Solutions of the Half-Space Land Subsidence Due to a Point Sink

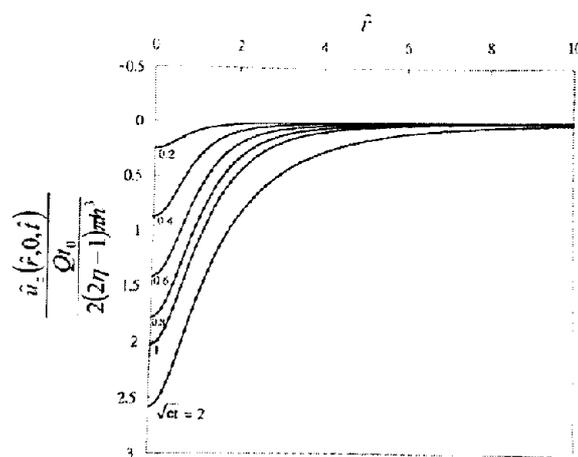
John C.-C. Lu¹, Feng-Tsai Lin²

¹Department of Civil Engineering,
Chung-Hua University

²Department of Naval Architecture,
National Kaohsiung Marine University

Abstract

Based on Biot's three-dimensional consolidation



圖二 無因次化之地表依時沉陷曲線

以下論文已發表，論文基本資料如下：

呂志宗、邱威誠，2004/11/26-27，「橫向等向性多孔介質受無限長度水平線熱源作用之閉合解」，中國機械工程學會第二十一屆全國學術研討會論文集，第2317-2322 頁。（本文係在國科會研究計畫 NSC93-2625-Z-216-001 補助下所完成。）

橫向等向性多孔介質受無限長度水平線熱源作用之閉合解

呂志宗 邱威誠

中華大學土木工程學系

國科會計畫編號：NSC-93-2625-Z-216-001

摘要

本文引用多孔介質熱彈性力學理論建立基本方程式，模擬多孔介質的熱流與滲流性質為橫向等向性，多孔介質的力學性質則模擬為等向性，研討出無限長度水平線熱源引致之無限域多孔介質力學行為變化等。數學模式中，多孔介質之力學行為應遵守牛頓第二運動定律及虎克定律，多孔介質的滲流行為應符合質量守恆定律與 Darcy 定律，而多孔介質的熱流行為則應服從能量守恆定律及熱傳導定律等。基於此，先研討出點熱源作用所引致的無限域多孔介質力學行為變化之基本解，再對此基本解作熱源長度之線積分，據以推導出無限長度水平線熱源作用所引致之多孔介質長期位移、超額孔隙水壓力及溫度變化量等之穩態閉合解。

關鍵字：無限域，橫向等向性多孔介質，線熱源，閉合解

1. 前言

許多材料都具有孔隙性質，且孔隙中有流體的流動、或孔隙中有熱能的流動，例如土壤、岩石、動植物之組織、以及過濾材料等等，都是具有孔隙之物質，且孔隙中有流體或熱能的流動。這些具有孔隙性質之材料通稱為多孔介質(Porous Medium)，其可能會因為溫度變化或熱能流動，而引致材料本身之熱力學行為產生變化，故有必要針對熱流引起的多孔介質力學行為變化加以探討。

多孔介質受熱流或溫度變化的影響之相關實例不勝枚舉，例如溫泉管線或輸油管線之設施、在軟弱地盤上施工所採用的冰凍工法、大氣溫度的變化、岩漿活動、核廢料掩埋場所產生的輻射熱、以及垃圾掩

埋場的悶燒現象等，均可能引致多孔隙之土壤或岩體的溫度發生變化。在生物力學問題上，因生物體之各個多孔隙器官組織中，也會呈現不同的溫度，且器官組織之溫度變化是與生物體的健康狀況有關，其溫度變化所扮演的機制，亦為相當重要之研究課題。此外，許多層狀堆積材料都具有橫向等向性(Cross-Anisotropic)之特性，土壤與岩石便是最常見之天然的層狀堆積材料，許多電子材料也具有層狀堆積之特性。基於此，本文擬探討橫向等向性之無限域多孔介質受無限長度水平線熱源作用之閉合解(Closed-Form Solution)，所引用之多孔介質熱彈性力學理論係源自於 Biot[1、2]所提出之多孔介質彈性力學理論，理論模式中考慮孔隙流體和固體介質均可壓縮。此外，多孔介質中之力學行為，必須遵守牛頓第二運動定律與虎克定律，孔隙流體的流動應遵守 Darcy 定律與質量守恆定律，而熱能的擴散傳輸則符合 Fourier 熱傳導定律以及能量守恆定律等。

以往針對多孔介質地層因溫度變化所引起的多孔隙地層力學行為變化之探討，已有許多。例如 Schiffman[3]根據 Biot[1、2]多孔介質彈性力學模式，曾引用 Fourier 熱傳導定律與能量守恆定律，探討多孔介質熱彈性力學問題；Booker 與 Savvidou[4-6]曾將熱流效應的影響加入 Biot 所建立之理論，推導出多孔隙之地層受點熱源[4]、球體熱源[5]以及異向性滲流情況[6]之多孔介質熱彈性力學問題；Aversa 和 Evangelista[7]則對 Neapolitan 地區的多孔隙黃凝灰岩作過熱膨脹性質之探討。

以上之研討，均尚未探討水平線熱源對多孔隙介質力學行為變化等的影響，此一研究重點，本文將深入加以研究。茲根據本文作者[8]已研討出之點熱源影響下之多孔介質力學行為變化及溫度變化等之穩態(Steady-State)基本解(Fundamental Solution)，擬再進

一步應用適當之線積分方式，探討水平線熱源長期作用下，所引起的多孔介質熱力學行為變化等，所研討出之解為穩態閉合解。以下之章節，先介紹點熱源所引致無限域多孔介質力學行為變化問題之解，再據以說明無限長度線熱源所引致無限域多孔介質力學行為變化問題之閉合解。

2. 點熱源問題之數學模式

2.1 橫向等向性多孔介質之熱彈性力學理論

2.1.1 介質位移、孔隙流體壓力與介質溫度變化量方程式

本文係引用多孔介質熱彈性力學理論建立基本方程式，首先探討如圖一所示無限域多孔介質受點熱源作用問題之數學模式及其閉合解。多孔介質在受外力作用、流體流動或熱能流動時，都會造成多孔介質本身物理量的改變，例如其體積、應力、溫度、超額孔隙水壓等均會產生變化。茲以微小之代表性元素體 (Representative Elementary Volume) 分析多孔介質之力平衡、質量守恆、以及能量守恆等方程式，分析過程中，係考慮代表性元素體中之固體介質和孔隙流體的溫度相同。若讓座標 z 軸通過點熱源，則問題可考慮為軸對稱。因此，多孔介質之應變 ε_{ij} ($i, j = r, \theta, z$) 與位移 (u_r, u_θ, u_z) 的線性關係式，可以軸對稱圓柱座標 (r, z) 表為：

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (1)$$

因問題為軸對稱，故環向位移 $u_\theta = 0$ 。令作用於多孔介質之總應力 (Total Stress) 為 τ_{ij} (壓力為正)、有效應力 (Effective Stress) 為 σ'_{ij} 、超額孔隙水壓力為 p 、多孔介質之溫度變化量為 θ ，再根據 Terzaghi[9] 的有效應力觀念 $\tau_{ij} = \sigma'_{ij} + p\delta_{ij}$ (δ_{ij} 為 Kronecker delta)，則：

$$\tau_{rr} = \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \varepsilon_{rr} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{\theta\theta} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{zz} - \frac{2G(\alpha_{sr} + \nu\alpha_{sz})}{1-2\nu} \theta + p, \quad (2a)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{rr} + \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \varepsilon_{\theta\theta} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{zz} - \frac{2G(\alpha_{sr} + \nu\alpha_{sz})}{1-2\nu} \theta + p, \quad (2b)$$

$$\tau_{zz} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{rr} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{\theta\theta} + \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \varepsilon_{zz}$$

$$- \frac{2G[2\nu\alpha_{sr} + (1-\nu)\alpha_{sz}]}{1-2\nu} \theta + p, \quad (2c)$$

$$\tau_{rz} = 2G\varepsilon_{rz}, \quad (2d)$$

其中 $G = E/2(1+\nu)$ 為多孔介質之剪力模數 (Shear Modulus)， E 是多孔介質之楊氏係數 (Young's Modulus)； ν 係多孔介質之波松比 (Poisson's Ratio)； α_{sr} 與 α_{sz} 分別為多孔介質中之固體介質的水平方向暨垂直方向的線性熱膨脹係數 (Linear Thermal Expansion Coefficient)。

作用於多孔介質之總應力需滿足力平衡方程式 $\tau_{ij,j} + f_i = 0$ ，亦即：

$$\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + f_r = 0, \quad (3a)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + f_z = 0. \quad (3b)$$

若不考慮微體力 (Body Force) f_i ($i = r, z$) 的影響，並考慮 Terzaghi[9] 的有效應力觀念，先將式 (1) 代入式 (2a)-(2d)，再將式 (2a)-(2d) 代入力平衡方程式 (3a)-(3b) 中，則軸對稱多孔介質熱彈性力學問題之基本方程式可以多孔介質位移量 u_i 、多孔介質溫度變化量 θ 和超額孔隙水壓 p 等表為：

$$GV^2 u_r + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} - G \frac{u_r}{r^2} - \frac{2G(\alpha_{sr} + \nu\alpha_{sz})}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (4a)$$

$$GV^2 u_z + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{2G[2\nu\alpha_{sr} + (1-\nu)\alpha_{sz}]}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (4b)$$

其中微分運算子 $\nabla^2 = \partial^2/\partial r^2 + 1/r \partial/\partial r + \partial^2/\partial z^2$ ； $\varepsilon = \partial u_r/\partial r + u_r/r + \partial u_z/\partial z$ 為多孔介質之體積應變量。

2.1.2 流量連續方程式和熱平衡方程式

本文將多孔介質模擬為橫向等向性之線彈性多孔介質，其中孔隙流體的流動和熱能之擴散傳輸等需分別遵守質量守恆定律和能量守恆定律，如以下所示：

$$-\nabla \cdot [n(v_w - v_s)] + q_w = 0, \quad (5a)$$

$$-\nabla \cdot h_e + q_h = 0, \quad (5b)$$

其中 v_w 與 v_s 分別為流體與固體之位移速度； h_e 係熱流率 (Heat Flux)； n 是多孔介質之孔隙率 (Porosity)； q_w 與 q_h 分別是作用於多孔介質內部或是外部的水源

與熱源。因僅考慮熱源的作用，故 $q_w = 0$ 。

多孔介質中孔隙流體的流動需滿足 Darcy 定律，多孔介質中之熱傳導現象需滿足 Fourier 定律。因考慮多孔介質為一橫向等向性介質，故其水平暨垂直方向之滲流性質及熱傳導性質並不相同，亦即：

$$n(v_w - v_s) = -\frac{k_r}{\gamma_w} \frac{\partial p}{\partial r} i_r - \frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial p}{\partial z} i_z \quad (6a)$$

$$h_c = -\lambda_w \frac{\partial \theta}{\partial r} i_r - \lambda_z \frac{\partial \theta}{\partial z} i_z \quad (6b)$$

式中 k_r 、 k_z 、 λ_w 與 λ_z 分別為橫向等向性多孔介質之水平滲透係數、垂直滲透係數、水平熱傳導係數與垂直熱傳導係數等； γ_w 是孔隙水之單位重。

將方程式(6a)、(6b)分別代入方程式(5a)、(5b)，並考慮有一個強度為 Q (焦耳/秒)之點熱源作用在座標原點(0,0)上，則可推得另兩個基本控制方程式如下：

$$\frac{k_r}{\gamma_w} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (7a)$$

$$\lambda_w \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \lambda_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{Q}{2\pi r} \delta(r) \delta(z) = 0 \quad (7b)$$

式中 $\delta(x)$ 是 Dirac delta 函數。式(4a)、(4b)、(7a)與(7b)組成問題之基本方程式。

2.2 邊界條件與初始條件

因係考慮點熱源是埋置於無限域多孔介質，故在無限深遠處 ($z \rightarrow \pm\infty$)，其多孔介質位移、超額孔隙水壓和多孔介質溫度變化量等應不會受點熱源的影響：

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \{u_r(r, z)\} \rightarrow 0, \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \{u_z(r, z)\} \rightarrow 0, \\ \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \{p(r, z)\} \rightarrow 0, \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \{\theta(r, z)\} \rightarrow 0 \quad (8)$$

本文係考慮問題之各項初始條件均為零。由式(7a)得知，在穩態情況下，流量連續方程式僅與超額孔隙水壓 p 有關，若與 p 相關之初始條件與邊界條件等均為零，則所研討出之超額孔隙水壓 p 即可預知其亦為零。

3. 點熱源作用引致之力學行為變化的閉合解

本文係引用積分變換方法解析如圖一所示點熱源問題之數學模式，所採用的方法為 Hankel 積分轉換和 Fourier 積分轉換方法，推導出無限域多孔介質受點熱源影響之多孔介質位移、超額孔隙水壓、及多孔介質溫度變化量等之穩態基本解可表示如下[8]：

$$u_r(r, z) = \frac{Q}{4\pi\eta G \lambda_w} \{\beta_r f_1 + [2\eta\beta_r - (2\eta - 1)\beta_z] f_2\} \quad (9a)$$

$$u_z(r, z) = \frac{Q}{4\pi\eta G \lambda_w} \{\beta_z f_3 + [2\eta\beta_z - (2\eta - 1)\beta_r] f_4\} \quad (9b)$$

$$p(r, z) = 0 \quad (9c)$$

$$\theta(r, z) = \frac{Q}{4\pi\lambda_w} \frac{1}{\mu R_\mu} \quad (9d)$$

式中 $\eta = (1 - \nu)/(1 - 2\nu)$ 。符號 β_r 、 β_z 及 $f_i (i=1, \dots, 4)$ 可分別表示如下：

$$\beta_r = 2G(\alpha_w + \nu\alpha_z)/(1 - 2\nu),$$

$$\beta_z = 2G[2\nu\alpha_w + (1 - \nu)\alpha_z]/(1 - 2\nu),$$

$$f_1 = \frac{1}{4(\mu^2 - 1)} \frac{r}{R} - \frac{1}{2(\mu^2 - 1)^2} \frac{r}{R^*} + \frac{1}{2\mu(\mu^2 - 1)^2} \frac{r}{R_\mu^*},$$

$$f_2 = \frac{1}{4(\mu^2 - 1)} \left(-\frac{r|z|}{RR^*} + \frac{r}{R^*} \right) + \frac{1}{2(\mu^2 - 1)^2} \frac{r}{R^*} \\ - \frac{\mu}{2(\mu^2 - 1)^2} \frac{r}{R_\mu^*},$$

$$f_3 = -\frac{1}{4(\mu^2 - 1)} \frac{z}{R} - \frac{\mu^2}{2(\mu^2 - 1)^2} \sinh^{-1} \frac{z}{r} \\ + \frac{\mu^2}{2(\mu^2 - 1)^2} \sinh^{-1} \frac{\mu z}{r},$$

$$f_4 = \frac{1}{4(\mu^2 - 1)} \frac{z}{R} + \frac{1}{2(\mu^2 - 1)^2} \sinh^{-1} \frac{z}{r} \\ - \frac{1}{2(\mu^2 - 1)^2} \sinh^{-1} \frac{\mu z}{r}.$$

其中符號 $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ ； $R^* = \sqrt{r^2 + z^2} + |z|$ ； $R_\mu = \sqrt{r^2 + \mu^2 z^2}$ ； $R_\mu^* = \sqrt{r^2 + \mu^2 z^2} + \mu|z|$ ；特徵根 $\mu = \sqrt{\lambda_w/\lambda_z}$ 。由式(9c)知，在穩態情況下，因考慮初始超額孔隙水壓為零，且無限深遠處之超額孔隙水壓亦為零，故無限域多孔介質受點熱源影響之長期超額孔隙水壓為零。

4. 線熱源作用引致之力學行為變化的閉合解

本單元擬進一步探討如圖二所示無限域多孔介質受無限長度線熱源作用之力學行為變化，首先考慮基本解在圓柱座標系統 (r, θ, z) 與卡氏座標系統 (x, y, z) 中應滿足以下之關係：

$$u_r(x, y, z) = u_r(r, \theta, z) \cos \theta - u_\theta(r, \theta, z) \sin \theta \quad (10a)$$

$$u_\theta(x, y, z) = u_r(r, \theta, z) \sin \theta + u_\theta(r, \theta, z) \cos \theta \quad (10b)$$

$$u_r(x, y, z) = u_r(r, \theta, z), \quad (10c)$$

$$p(x, y, z) = p(r, \theta, z), \quad (10d)$$

$$g(x, y, z) = g(r, \theta, z), \quad (10e)$$

因點熱源問題為軸對稱，故其中之 $u_\theta = 0$ ；另外，圓柱座標系統下之變數 $r^2 = x^2 + y^2$ 。

茲於如圖二所示無限長線熱源上取一長度為 ds 之一小段線熱源作分析，因單位長度之線熱源強度為 q (焦耳/公尺/秒)，故 qds 恰好對應於點熱源問題之熱源強度 Q (焦耳/秒)。此外，點熱源問題之基本解中的變數 $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ ，係表示多孔介質中之任意點至點熱源間之距離，因此線熱源問題中，多孔介質內之任意點 (x, y, z) 至 qds 之距離應改寫為 $R = \sqrt{x^2 + (y-s)^2 + z^2}$ 。其它相關之項次亦依此觀念作調整，最後再對變數 s 作 $-\infty$ 至 ∞ 的線積分，即可研討出線熱源問題之閉合解。基於此，則所研討出之多孔介質位移、超額孔隙水壓力、及多孔介質溫度變化量等可表為：

$$u_x = \frac{q}{4\pi\eta G\lambda_z} \{ \beta_r h_1 + [2\eta\beta_r - (2\eta - 1)\beta_z] h_2 \}, \quad (11a)$$

$$u_y = 0, \quad (11b)$$

$$u_z = \frac{q}{4\pi\eta G\lambda_z} \{ \beta_z h_3 + [2\eta\beta_z - (2\eta - 1)\beta_r] h_4 \}, \quad (11c)$$

$$p = 0, \quad (11d)$$

$$g = \frac{q}{4\pi\lambda_z} h_5, \quad (11e)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_{xx} = & \frac{q}{4\pi\eta\lambda_z} \{ (2\eta - 1)\beta_r h_6 + 2(\eta - 1)\beta_z h_7 \\ & + [2(2\eta - 1)\beta_r - \beta_z] h_8 + \eta\beta_r h_9 + \beta_r h_{10} \\ & + [2\eta\beta_r - (2\eta - 1)\beta_z] h_{11} \}, \end{aligned} \quad (11f)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_{yy} = & \frac{q}{4\pi\eta\lambda_z} \{ (2\eta - 1)\beta_r h_6 + 2(\eta - 1)\beta_z h_7 \\ & + [2(2\eta - 1)\beta_r - \beta_z] h_8 + \eta\beta_r h_9 - \beta_r h_{10} \\ & - [2\eta\beta_r - (2\eta - 1)\beta_z] h_{11} \}, \end{aligned} \quad (11g)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_{zz} = & \frac{q}{4\pi\eta\lambda_z} \{ 2(\eta - 1)\beta_r h_6 + 2\eta\beta_z h_7 \\ & + [-2\eta\beta_r + 2(3\eta - 1)\beta_z] h_8 + \eta\beta_z h_9 \}, \end{aligned} \quad (11h)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_{xz} = & \frac{q}{4\pi\eta\lambda_z} \{ [2\eta\beta_r - 2(\eta - 1)\beta_z] h_{12} \\ & + [2\eta\beta_z - 2(\eta - 1)\beta_r] h_{13} \}, \end{aligned} \quad (11i)$$

$$\sigma'_{yz} = 0, \quad (11j)$$

其中 $h_i (i=1, 2, \dots, 13)$ 的表示式如以下所示：

$$\begin{aligned} h_1 = & \frac{1}{2(\mu^2 - 1)^2} \left\{ x \left[\frac{3 - \mu^2}{2} \ln(x^2 + z^2) - \frac{1}{\mu} \ln(x^2 + \mu^2 z^2) \right] \right. \\ & \left. + z \left(\tan^{-1} \frac{2xz}{z^2 - x^2} - \tan^{-1} \frac{2\mu xz}{\mu^2 z^2 - x^2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} h_2 = & \frac{1}{2(\mu^2 - 1)^2} \left\{ x \left[\mu \ln(x^2 + \mu^2 z^2) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} (\mu^2 + 1) \ln(x^2 + z^2) \right] + \frac{\mu^2 z}{2} \left(\tan^{-1} \frac{2\mu xz}{\mu^2 z^2 - x^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \tan^{-1} \frac{2xz}{z^2 - x^2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (12b)$$

$$\begin{aligned} h_3 = & \frac{1}{2(\mu^2 - 1)^2} \left[\frac{3\mu^2 - 1}{2} z \ln(x^2 + z^2) \right. \\ & \left. - \mu^2 z \ln(x^2 + \mu^2 z^2) + \mu^2 x \left(\tan^{-1} \frac{2\mu xz}{\mu^2 z^2 - x^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \tan^{-1} \frac{2xz}{z^2 - x^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (12c)$$

$$\begin{aligned} h_4 = & \frac{1}{2(\mu^2 - 1)^2} \left[-\frac{\mu^2 + 1}{2} z \ln(x^2 + z^2) + z \ln(x^2 + \mu^2 z^2) \right. \\ & \left. + x \left(\tan^{-1} \frac{2xz}{z^2 - x^2} - \tan^{-1} \frac{2\mu xz}{\mu^2 z^2 - x^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (12d)$$

$$h_5 = -\frac{1}{\mu} \ln(x^2 + \mu^2 z^2), \quad (12e)$$

$$\begin{aligned} h_6 = & \frac{1}{2(\mu^2 - 1)^2} \left[(\mu^2 - 1) \frac{z^2}{x^2 + z^2} + \frac{3 - \mu^2}{2} \ln(x^2 + z^2) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\mu} \ln(x^2 + \mu^2 z^2) \right], \end{aligned} \quad (12f)$$

$$\begin{aligned} h_7 = & \frac{1}{2(\mu^2 - 1)^2} \left[(\mu^2 - 1) \frac{z^2}{x^2 + z^2} \right. \\ & \left. + \frac{3\mu^2 - 1}{2} \ln(x^2 + z^2) - \mu^3 \ln(x^2 + \mu^2 z^2) \right], \end{aligned} \quad (12g)$$

$$\begin{aligned} h_8 = & \frac{1}{2(\mu^2 - 1)^2} \left[-(\mu^2 - 1) \frac{z^2}{x^2 + z^2} \right. \\ & \left. - \frac{\mu^2 + 1}{2} \ln(x^2 + z^2) + \mu \ln(x^2 + \mu^2 z^2) \right], \end{aligned} \quad (12h)$$

$$h_9 = \frac{1}{\mu} \ln(x^2 + \mu^2 z^2), \quad (12i)$$

$$\begin{aligned} h_{10} = & \frac{1}{2(\mu^2 - 1)^2} \left[-(\mu^2 - 1) \frac{x^2}{x^2 + z^2} - \frac{\mu^3 - 5\mu + 4}{\mu} \right. \\ & \left. - \frac{\mu^2 - 3}{2} \ln(x^2 + z^2) - \frac{1}{\mu} \ln(x^2 + \mu^2 z^2) \right], \end{aligned} \quad (12j)$$

$$h_{11} = \frac{1}{2(\mu^2 - 1)^2} \left[(\mu^2 - 1) \frac{x^2}{x^2 + z^2} - (\mu^2 - 1)^2 - \frac{\mu^2 + 1}{2} \ln(x^2 + z^2) + \mu \ln(x^2 + \mu^2 z^2) \right], \quad (12k)$$

$$h_{12} = \frac{1}{2(\mu^2 - 1)^2} \left[(\mu^2 - 1) \frac{xz}{x^2 + z^2} + \mu^2 \left(\tan^{-1} \frac{2\mu xz}{\mu^2 z^2 - x^2} - \tan^{-1} \frac{2xz}{z^2 - x^2} \right) \right], \quad (12l)$$

$$h_{13} = \frac{1}{2(\mu^2 - 1)^2} \left[-(\mu^2 - 1) \frac{xz}{x^2 + z^2} + \left(\tan^{-1} \frac{2xz}{z^2 - x^2} - \tan^{-1} \frac{2\mu xz}{\mu^2 z^2 - x^2} \right) \right]. \quad (12m)$$

引用式(11a)-(11j)，即可計算出無限域多孔介質中，因無限長度線熱源作用所引致之多孔介質位移、多孔介質溫度變化量與多孔介質應力變化量等。

5. 結論

本文旨在探討橫向等向性多孔介質受無限長度水平線熱源影響之多孔介質位移、超額孔隙水壓、多孔介質溫度變化量與多孔介質應力變化量等之閉合解。研討過程乃根據已研討出之點熱源引致之多孔介質力學行為變化等之基本解，再進一步作適當之線積分，研討出水平線熱源作用於多孔介質所引致之多孔介質力學行為變化量等之閉合解。

為驗證各項研究成果之正確性，作者曾以數值分析方法繪製數值圖表結果，依圖表變化趨勢判斷其正確性；此外，並曾將所研討出之閉合解，代回組成律、變位措和條件、及力平衡方程式等基本方程式中，以確保所研討出之結果正確無誤。本文之研究成果，可作為研討線熱源相關問題之基礎，亦可作為進一步探討平面形狀熱源或體積熱源所引致之多孔介質力學行為變化的基礎。

參考文獻

1. Biot, M.A., General theory of three-dimensional consolidation, *J. Appl. Phys.*, Vol. 12, pp. 155-164, 1941.
2. Biot, M.A., Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid, *J. Appl. Phys.*, Vol. 26, pp. 182-185, 1955.

3. Schiffman, R.L., A thermoelastic theory of consolidation, *Environmental and Geophysical Heat Transfer*, C.J. Cremers, et al.,(eds.), ASME, Vol. 4, New York, pp. 78-84, 1971.
4. Booker, J.R. and Savvidou, C., Consolidation around a point heat source, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 9, pp. 173-184, 1985.
5. Booker, J.R. and Savvidou, C., Consolidation around a spherical heat source, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 20, pp. 1079-1090, 1984.
6. Savvidou, C. and Booker, J.R., Consolidation around a heat source buried deep in a porous thermoelastic medium with anisotropic flow properties, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 13, No. 1, pp. 75-90, 1989.
7. Aversa, S. and Evangelista, A., Thermal expansion of Neapolitan yellow tuff, *Rock Mech. Rock Engng.*, Vol. 26, pp. 281-306, 1993.
8. 呂志宗，橫斷面均向性岩層受深層點熱源影響之積分變換解析，2002 岩盤工程研討會論文集，第 121-132 頁，2002。
9. Terzaghi, K., *Theoretical Soil Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1943.
10. Abramowitz, M. and Stegun, I.A., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, Inc., New York, 1970.

Closed-Form Solutions of the Cross-Anisotropic Porous Medium Due to an Infinite Length Horizontal Line Heat Source

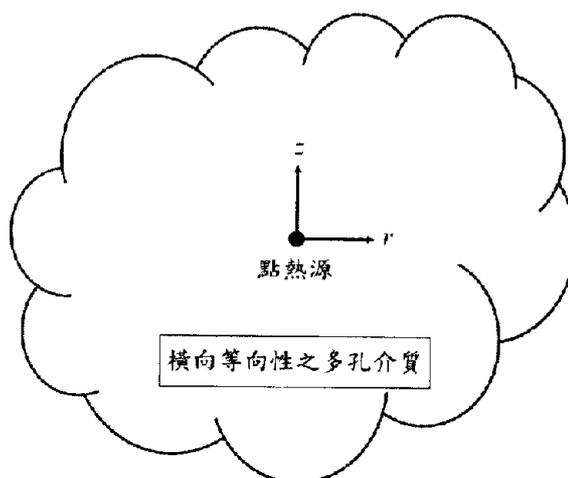
John C.-C. Lu, Wei-Cheng Chiu
Department of Civil Engineering
Chung-Hua University

Abstract

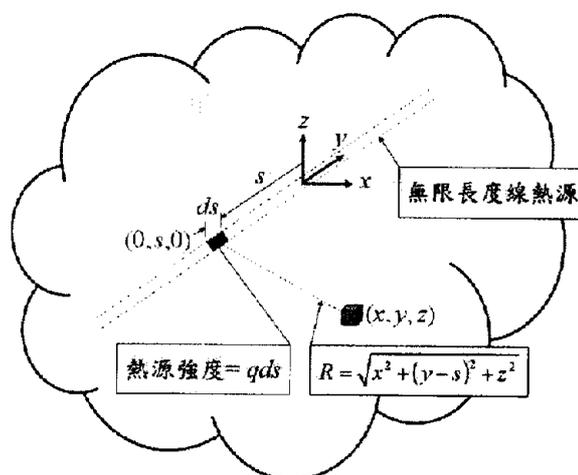
This paper studies the long-term thermal elastic responses of the porous medium containing an infinite

length horizontal line heat source of constant strength. The mechanical responses of the porous materials are modeled as isotropic while the flow and thermal behaviors are treated as cross-anisotropic, respectively. The study is extended from previous investigation of full space behavior due to a point heat source. Line integral was applied to derive the closed-form solutions of the thermally elastic deformation, pore water pressure distribution and temperature changes of the porous medium. The governing equations are formulated by Newton's second law, Hooke's law, mass balance principle, energy balance principle, Darcy's Law and Fourier's heat conduction law, *etc.* The derived solutions are steady-state closed-form solutions.

Keywords: full space, cross-anisotropic porous medium, line heat source, closed-form solution



圖一 無限域多孔介質受點熱源作用示意圖



圖二 無限域多孔介質受無限長度水平線熱源作用示意圖

以下論文已發表，論文基本資料如下：

林振華、呂志宗，2004/12/3-4，「冷凍工法施工設計條件之研究」，中華民國第二十八屆全國力學會議論文集，第 955-962 頁。(本文係在國科會研究計畫 NSC93-2625-Z-216-001 補助下所完成。)

冷凍工法施工設計條件之研究

林振華 呂志宗

中華大學土木工程學系

摘要

本文以有限元素分析方法，解析冷凍工法施工時，冷凍循環所形成之凍土壁厚度、以及達凍土設計厚度所需的時間。數值分析過程中，首先探討冷凍工法之合理化數值分析模式的影響因素，包括地層分析範圍、土層容積含水率、凍結管之直徑與間距、凍結土層厚度等等，最後再將數值分析結果與相關學者所提出之經驗公式的計算結果作比較，以瞭解在各種不同凍結管徑與間距的搭配下，因土層容積含水率變動，對凍土厚度的影響，進而計算出凍土達設計厚度所需之時間。

良好的凍結管直徑與間距之配置，關係著凍結時間與施工成本。在分析結果中發現，當凍結管直徑為 0.09 m、凍結管間距為 1.2 m 時，達凍土設計厚度所需的時間最少，且凍結溫度最低，是相當好的凍結管設計安排。

關鍵詞：冷凍工法、ANSYS、有限元素法

一、前言

近年來，台灣經濟持續蓬勃發展，許多工程建設均朝地下化發展。地下開挖時，所遇到的地層不確定危險因素有許多，如地下水位過高、地質屬沉泥質軟弱土層等，若稍不注意，往往即造成工程災害，致危害公共安全。為使土地能夠安全開挖，故需實施地盤改良。現今土木工程界常用的地盤改良工法有許多種類，例如垂直砂樁排水、壓力灌漿、藥液灌漿、冷凍工法等等，每種工法之適用情況均需根據其現地狀況而定，其中冷凍工法是近年來新興的地盤改良工法。

冷凍工法係可在不改變土層現況

下，又能兼顧施工安全的地盤改良工法之一，在國內外已有許多成功的施作案例。冷凍工法多應用於軟弱地盤或地下水位較高的地區，其優點為在施作過程中，可讓土壤形成凍土，以使土壤具有足夠的強度，抵抗外部的壓力；另外，凍土與其他結構體之介面接密性良好，具有完整的止水性，所形成的凍土壁又可作為開挖時的擋土支撐，優點不少。

台灣已有捷運新店線 CH221 標與板橋線 CP262 標等施工案例曾引用冷凍工法。在施作冷凍工法時，凍土達設計厚度所需之時間是相當重要的設計參數，因其與施工成本有關，此亦為本文之研究重點。本文將引用有限元素分析軟體 ANSYS，分析凍結之管徑、間距、與土層容積含水率等對凍土厚度的影響，再進一步計算出凍土達設計厚度所需之時間，以供冷凍工法於工程設計時之參考。

二、基本理論

2.1 地層溫度分佈之探討

地盤中凍土區與非凍土區之溫度分佈曲線係如圖 1 所示。由圖 1 可知，凍土區內凍土溫度係成直線變化，非凍土區則呈非線性變化，距離凍土範圍一定距離之外為地盤原始溫度。而不同的土壤容積含水率亦會影響冷凍時的溫度變化，土壤容積含水率 P 可由下式求得[1]：

$$P = nS_r \quad \text{或} \quad P = \frac{V_v V_w}{V} = \frac{V_w}{V} \quad (1)$$

式中土壤容積含水率 P (m^3/m^3) 係定義為單位土壤體積內之孔隙水體積； n 為土壤孔隙率； S_r 為土壤飽和度，文獻[1]中 S_r 係表示為 S 。

2.1.1 地中溫度之推估

1981 年時日本機械化協會曾探討地盤冷凍範圍隨時間成長之情況，其成長情形可藉由埋設於凍土區內的測溫管所量出之地中溫度，再利用下式推估而得[2]：

$$X = d \cdot \theta'_c / (\theta'_c - \theta_a) \quad (2)$$

式中 X = 所形成之凍土厚度 (m)，即土壤為 0°C 的範圍； d = 測溫管距凍結管之距離 (m)； θ'_c = 管列之冷卻面溫度 ($^\circ\text{C}$)； θ_a = 測溫管之溫度 ($^\circ\text{C}$)；其中 θ'_c 可藉由下式求得：

$$\theta'_c = \theta_b (1 + M_x) / 2 \quad (3)$$

式中 θ_b 為凍結管內冷凍液之溫度 ($^\circ\text{C}$)；而變數 M_x 係定義為：

$$M_x = (A_1 + A_2) / (B_1 + B_2) \quad (4)$$

其中參數 $A_1 = \log(0.5a/P_i) \log(4m/9)$ ；

$A_2 = \log(1.5a/P_i) \log(4v)$ ；

$B_1 = \log(m/2) \log(v/2)$ ；

$B_2 = -\log[(mP_i)/3a] \log(vP_i/a)$ ；

參數 $m = [X^2 + (1.5P_i)^2] / P_i^2$ ；

$v = [X^2 + (0.5P_i)^2] / P_i^2$ ； a = 凍結管半徑 (m)； P_i = 凍結管埋設間距 (m)；另外，文獻[2]中之 n 係以 v 代替。

2.2 凍土達設計厚度所需時間之推估

姚義久[3]曾提出 Neumann 氏解法，說明土壤達凍結厚度所需時間可由實測或理論解法推估，冰層形成的過程，可根據熱傳導理論分析而得。Neumann 氏解法之說明如下：

(一) 假設條件

1. 初始地面溫度 T_0 (大於 0°C) 為定值，如圖 2 所示。
2. 地面溫度突然下降至 T_f (小於 0°C) 後保持不變。
3. 土壤內部之熱輸送僅考慮傳導一項，對流效應不計。

如圖 3 所示，於凍土區 I 及未凍土區

2，依熱傳導公式可得：

$$\bullet \text{ 凍土區：} \frac{\partial T_1}{\partial t} = \alpha_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial X^2} \quad (0 < X < \xi)$$

$$\bullet \text{ 未凍土區：} \frac{\partial T_2}{\partial t} = \alpha_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial X^2} \quad (X > \xi)$$

式中 T_1 與 T_2 分別為時間 t 時，深度 X 處之凍土及未凍土的溫度； α_1 與 α_2 分別為凍土及未凍土之溫度擴散係數； ξ 為凍結管至土壤凍結面的距離 (m)，而土壤凍結面係定義為 X 方向上溫度 0°C 以下之凍土位置。

(二) 環境狀況

1. 初始條件： $X > 0, t = 0, T_1 = T_0 = \text{常數}$ 。

2. 邊界條件：

$\bullet X = 0, t \geq 0$ 時， $T_1 = T_x$ 。

$\bullet X \rightarrow \infty, t \geq 0$ 時， $T_2 \rightarrow T_0 = \text{常數}$ 。

$\bullet X = \xi, t > 0$ 時， $T_1 = T_2 = T_f = 0^\circ\text{C}$ 。

(三) 熱平衡

凍結潛熱與傳至未凍土熱量之和須等於傳至凍土之熱量，故可得：

$$\begin{aligned} & -K_1 \left[\left(\frac{\partial T_1}{\partial X} \right)_{X=\xi} \right] Adt \\ & = -Q_i w \rho_d Ad\xi - K_2 \left[\left(\frac{\partial T_2}{\partial X} \right)_{X=\xi} \right] Adt \end{aligned} \quad (5)$$

經計算後可得：

$$\begin{aligned} & b_1 (T_f - T_c) \frac{e^{-\beta^2/4\alpha_1}}{\Phi(\beta/2\sqrt{\alpha_1})} \\ & - b_2 (T_0 - T_f) \frac{e^{-\beta^2/4\alpha_2}}{1 - \Phi(\beta/2\sqrt{\alpha_2})} \\ & = \frac{\sqrt{\pi}}{2} Q_i w \rho_d \beta \end{aligned} \quad (6)$$

其中 Φ 為超越函數，文獻[3]中 Φ 是以 G 表示；係數 $b_1 = K_1 / \sqrt{\alpha_1} = \sqrt{K_1 C_1 \rho_1}$ ；而係數 $b_2 = K_2 / \sqrt{\alpha_2} = \sqrt{K_2 C_2 \rho_2}$ ；未知函數 β 可用圖解法解出。由 $X = \beta\sqrt{t}$ ，即可獲得冰凍厚度與時間之關係。

2.3 冷凍工法應用於不同土質之相關研究

許多學者專家均曾針對不同土質，探討其對冷凍工法的影響。Maishman[4]認為冷凍工法施作時，凍結設備之凍結負荷影響因素包括：地層中土壤與地下水的初始溫度、水凍結成冰時之融解熱、凍土設計的最終溫度、周圍土層流向凍土壁的熱量、暴露出來的表面受大氣熱對流的影響、以及地下水受熱對流之作用向凍土壁移動等影響因素。

陳正忠[5]經由實驗發現，沉泥質砂具有明顯的凍結膨脹現象，此發現證明：「細顆粒含砂土量高的土壤，若有充分的水分供給，則砂土在冰凍後會有很明顯的凍脹變形，且越靠近凍土區所產生之冰脹壓力也越大。」而沉泥質砂土所產生的膨脹量有可能對鄰近之結構物造成擠壓的危險，故於施工設計時必須特別加以注意。

楊國榮等人[2]曾利用日本建設機械化協會所提出之方式，計算出有效凍土厚度與凍土平均溫度，並實際運用於台北捷運系統新店線 CH221 標 2A 潛盾隧道湧水災變受損環片之更換。由其研究發現，可由施工前凍結管單位長度負荷及凍結管長度求得凍土負荷，再考慮非凍結部負荷、配管負荷、開挖所造成之負荷等，即可算出冷凍施工時所需凍結裝置的必要容量，如圖 4 所示；另外，凍土厚度及凍結時間可由管列凍結理論計算求得，圖 5 為凍結土厚度與時間的關係。

2.4 冷凍工法施工時應注意事項

歐德培與黎偉榮[1]提出冷凍工法的適用時機、及其地盤周邊應考慮之環境因素。一般而言，適用的條件如下：

1. 土壤之含水量最低限度為 5%~7%。
2. 隧道之覆土厚最小為 4 公尺。
3. 土壤之含砂量愈大，其所形成之凍結拱或壁強度愈高。
4. 凍結管之排放間距為 0.5~1.2 公尺不等，凍結管之管徑大小及管之排放間距亦須配合。原則上，凍結管間距與管徑之比值宜小於 13。
5. 土壤孔隙內之滲流速度若大於 1~2 m/day ，則應採用鹽水循環凍結方式；

若採用液態氮凍結方式，且土壤孔隙內之滲流速度大於 10 m/day ，則冰牆不易成形。

三、有限元素分析程式之應用

3.1 有限元素程式 ANSYS 的簡介

ANSYS[6]的主要功能包括三個部分：前處理模組、分析計算模組和後處理模組。前處理模組提供了一個強大的實體建模及網格劃分工具，使用者可以方便地建立有限元素模型；分析計算模組包括線性與非線性結構分析、熱傳分析、流體動力學分析、電磁場分析、聲場分析、壓電分析以及多物理場的耦合分析等，並可類比多種物理介質的相互作用，具有靈敏度分析功能及最快速的分析能力；後處理模組可將計算結果以彩色的等值曲線顯示、梯度顯示、向量顯示、立體切片顯示、透明及半透明顯示（可看到結構內部）等圖形顯示方式，也可將計算結果以圖表、曲線形式等加以顯示或輸出。ANSYS 共提供了 100 種以上的元素種類，用以模擬工程中的各種結構和材料。

3.2 分析方法

本文是引用有限元素分析軟體 ANSYS，探討容積含水率不同的土層之溫度變化情形，進而分析出其所形成之凍土厚度與凍結時間。分析分法說明如下：

1. 選擇分析類型：由於本文之研究內容與溫度有關，故先選擇熱傳分析。
2. 決定分析種類：ANSYS 分析軟體中的熱傳元素分別為 SOLID70、SOLID87、及 SOLID90 等，其可作三維分析、穩態或暫態熱傳分析。
3. 設定分析元素的材料參數：由於土壤容積含水率改變時會影響土壤的熱傳導係數、比熱、密度、凍結管的熱傳導係數等熱傳性質，故均須分別加以設定，所設定之相關參數如表 1 所示。
4. 建構實體分析模型：將欲模擬之地層依據實體尺寸建立模型，須模擬土層範圍係介於凍結與非凍結之間，以便求得土

層凍結厚度，本文係以 $3.5m \times 3.5m \times 3m$ 之土體模型配合 $2m$ 的垂直凍結管長度進行分析。

5. 網格化：網格尺寸大小亦會影響分析結果，網格愈小分析之結果愈佳，但仍有其一定之收斂值。
6. 選擇求解器與設定容許誤差：求解器選擇 Precondition Conjugate Gradient (預置條件共軛梯度求解器)，並設定誤差值為 1×10^{-6} 。
7. 設定邊界條件：考慮由凍結管吸收熱能，地表面會產生對流。
8. 穩態及暫態分析：了解土壤因時間增加，所產生之短期及長期溫度變化情形。
9. 後處理：擷取、整理並分析數據結果，繪製溫度分佈圖並加以討論。

3.3 參數影響探討

一般冷凍工法施工時所使用的冷凍循環機組包含 $37.5kW$ 、 $75kW$ 、 $150kW$ 三種，本文考慮以 $75kW$ 冷凍循環機組進行分析，採鹽水循環冷凍方式針對垂直凍結管進行討論與研究，僅考慮單一土層。

由文獻研討知，土壤之最低含水量限度為 $5\% \sim 7\%$ ，利用公式 $Se = G_s w (S + e)$ (G_s 、 w 分別為土壤之飽和度、孔隙比、土粒比重與含水量) 可計算出容積含水率 P 最小為 18.55% 。一般除了地下含水層以外，土壤含水量不會超過 70% ，故考慮土層容積含水率為 $0.2 \sim 0.7$ 對土層凍結的影響。所使用之土壤材料熱性質參數，主要係依據日本建設機械化協會在 1981 年所建議的飽和土壤在不同容積含水率下之相關參數，並適度簡化冷凍工法施工時之相關因素，僅針對垂直凍結管加以討論。因凍結管直徑大都在 $3.5in$ 以上，故本研究分別對直徑 $0.09m$ 、 $0.10m$ 、 $0.11m$ 、 $0.12m$ 之凍結管加以討論，並依據 $S/D < 13$ (S 、 D 分別為凍結管之間距與直徑) 的原則，考慮凍結管之間距為 $1.15m \sim 1.55m$ ，據以觀察凍結管之間距與直徑對凍結厚度與凍結時間的影響。本文共分析 19 種假設案例，案例之詳細分類如表 2 所示。

3.3.1 管列方式對凍土厚度的影響

凍結理論有平板與單管二種理論，而實際施工時所遭遇之凍結方式則是介於平板與單管之間的管列凍結，如圖 6 所示。亦即於土壤於開始凍結時應採用單管凍結理論，及至各凍結管形成凍土冰牆後，則應採用平板理論分析。

3.3.2 凍結管的埋設方式對凍土的影響

凍結管的埋設方式是依據凍土的防護目的及防護形狀而決定的，無法埋設水平凍結管時，則施作垂直凍結管。因垂直凍結管在地面上可擁有較大的配管面積，所以是最常使用的凍結管理設方式。

3.3.3 容積含水率對冷凍溫度的影響

由表 3 得知，土體在冷凍時，其凍結溫度會隨容積含水率升高而降低，這表示當土體容積含水率較高時，土體之凍結溫度會下降的較快速，且凍土也能達到較低的凍結溫度。由此可知，土層含水量在冷凍工法施工時相當重要，故欲達到較低之凍結溫度時，應提高土體之容積含水量，以增加施工時的便利性。

3.3.4 容積含水率對凍土厚度的影響

由表 3 知悉，不論凍結管直徑為何，其凍結溫度皆隨容積含水率升高而降低，但外部土壤溫度卻相對上升。由此可知，當土層含水量較高時其凍結速度較快，但也因含水量高而導致其凍土厚度較小，這是因為水會增加熱傳的速度，故會帶走周圍土壤的溫度，而導致此一現象。

3.3.5 凍結管直徑對冷凍厚度的影響

根據歐德培與黎偉榮[1]所建議的，凍結管排放間距約為 $0.5 \sim 1.2$ 公尺不等，如果土壤的熱傳導係數較低或含水量較高時，間距應要再小一些。Lacy 和 Floess[7] 曾提出凍結管之管徑大小及凍結管之排放間距亦須相互配合，即凍結管間距與管徑之比值宜小於或等於 13，只要知道所使用凍結管的直徑，就可以估算出凍結管的

最大間距。

圖 7~11 為凍結管直徑影響凍土厚度之分析圖，由圖可知當凍結管直徑在一定範圍內時，可使得凍土厚度增加，但超過一定範圍時，則必須耗費更多的冷凍液才能使凍結土壤，所需之凍結時間也較多。

3.3.6 凍結管間距對冷凍厚度的影響

圖 7~9 顯示當凍結管間距為固定時，凍土厚度均隨著直徑增加而增加，但其增加之趨勢有趨於平緩之現象，表示凍土厚度雖然隨著直徑增加而增加，但有其臨界值存在，當 $(S-D)/D$ 約介於 10.5~11 之間時，凍土厚度便趨於定值，表示超過此值之後凍土厚度成長速度緩慢，除非改變冷凍條件，否則無法使凍土量大幅提升。由圖 10~11 可看出當超過此臨界值時，凍土厚度即成負成長，此結果顯示凍結管直徑與間距宜有適當之配置，並非直徑愈大所得到之冷凍效果愈好。

由圖 12~15 知，當凍結管直徑固定時，冷凍效果會隨著間距增加而降低，但有一尖峰值。當 $(S-D)/D$ 約介於 9.5~11 之間時，可達最佳冷凍效果，當間距大於 1.11m 時，各容積含水率所形成之凍土厚度幾乎一致，表示間距大於 1.11m 之後凍土厚度受間距影響效果已經很小。

四、結語與建議

1. 查閱圖 7~11，可設計出不同現地狀況下所建議之凍結管直徑與間距。只要再考慮所設計出之凍結管是否可使凍土厚度達到設計之要求，最後再依凍結管直徑與間距，搭配引用圖 16~17，即可求出進行冷凍工法施工時，凍土達設計厚度所需之時間。
2. 依據分析所得數據，可知各種土壤容積含水率所對應之凍結時間。當然，若使用更高功率之冷凍循環機組，或是增加凍結列數，可減少凍結循環所需時間。
3. 由研究發現，與其他案例相比，案例 6 達凍土設計厚度所需的時間最短，且凍結溫度最低。由此可知，凍結管直徑為 0.09m、凍結管間距為 1.2 m 時，是相

當好的凍結管設計安排。

4. 當土壤的容積含水率較高，且土壤的凍結溫度較低時，所形成的凍土厚度會較小。依據圖表分析結果可知，當土層容積含水率等於 0.4 左右時，其凍土成長厚度雖較緩慢，但土層降低溫度已符合需求。故控制土層容積含水率約為 0.4 時，既可使土層溫度降低亦可使凍土厚度符合設計之需求。
5. 當冷凍管間距 S 超過 1.3 m 時，凍土厚度即呈負成長。固定冷凍管直徑尺寸 D ，比較其冷凍效能時發現，冷凍效果會隨冷凍管間距 S 之增加而降低，但有一尖峰值。當 $(S-D)/D$ 約介於 9.5~11 之間時，可達最佳的冷凍效果。
6. 適當的增加受凍土層容積含水率比使用高效能之冷凍循環機組來得符合經濟效益。而增加受凍土層容積含水率的方法中，建議可考慮採用於現地施打加壓灌水孔的方式，補充土層容積含水率不足的土壤水分，惟灌水時須注意水溫及水的流速，以免導致土層不易凍結。

誌謝

本文係在 NSC-93-2625-Z-216-001 國科會計畫補助下所完成，特此申謝。

參考文獻

1. 歐德培、黎偉燊，「處理地層開挖採用冷凍工法施工之概述」，中華技術，第 24 期，第 61-67 頁(1994)。
2. 楊國榮、范陳柏、趙季禮、王錦伍，「台北捷運 CH221 標冷凍工法施工案例」，地工技術，第 71 期，第 83-96 頁(1999)。
3. 姚義久，「單層地盤結凍深度之理論分析」，地下工程實務，第 4 期，第 256-264 頁(1991)。
4. Maishman, D., *Ground Freezing*, In *Construction Dewatering: A Guide to Theory and Practice*, Chap. 20, John Wiley & Sons, New York, pp. 349-359(1981).
5. 陳正忠，「液態氮冷凍工法應用於岩石

之研究」，台灣科技大學營建工程系碩士論文(1999)。

6. "User's Guide of ANSYS," Release 6.1, ANSYS, Inc., (2002).
7. Lacy, H. S., and Floess, C. H., "Minimum Requirements for Temporary Support with Artificially Frozen Ground," *Transportation Research Record 1190*, New York, pp. 46-56 (1988).

Research on the Design Conditions of Ground Freezing Method

John C.-C. Lu Chen-Hua Lin
Department of Civil Engineering,
Chung-Hua University

ABSTRACT

The research is focus on the ground frozen thickness and the time to reach the designed frozen thickness of the soils when using ground freezing method. Finite element method is introduced as the numerical analysis technique and the rationalized numerical analysis procedures are formulated. Empirical results presented at the references have been compared with the numerical results of this investigation. The numerical results are influenced by the meshed domain of the stratum, the volume hydrous ratio of the ground, the diameter and spacing of the freezing pipes, and the frozen thickness to reach, etc. All of the above mentioned influenced factors have treated in this research and can help to figure out the rationalized numerical analysis procedures.

The freezing time and construction cost are greatly influenced by the diameter and spacing of the freezing pipes. The arrangement of the diameter and spacing of the freezing pipes are suggested as 0.09 m and 1.2 m, respectively, after this study.

Keywords: ground freezing method, ANSYS, finite element method

表 1 飽和土於不同容積含水率時之熱力性質

註：資料取自水地工程雜誌(1981)

P: 容積含水率 [m ³ /m ³]		0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
飽和土之 比熱 [kg/m ³]	飽和土比熱	2440	2250	2080	1900	1720	1540
	飽和土比熱	2416	2224.48	2032.34	1840.8	1648.96	1457.12
飽和土之 比熱 [1kg/°C]	飽和土比熱	1188.3098	1354.33844	1548.22	1780.13826	2059.88874	2405.0663
	飽和土比熱	1006.43698	1252.20419	1124.27588	1201.5913	1295.91652	1338.50419
飽和土之 比熱 [W/m ²]	飽和土比熱	2.519390611	2.174627	1.885258	1.639632944	1.424867889	1.23333511
	飽和土比熱	3.212037323	2.94264172	2.93031228	2.807643222	2.690318944	2.576483
飽和土之 比熱 [m ³ /s]	飽和土比熱	8.6879E-07	7.1047E-07	5.8355E-07	4.8476E-07	4.02157E-07	3.3353E-07
	飽和土比熱	1.32081E-06	1.2869E-06	1.2006E-06	1.26933E-06	0.000001258	1.2470E-06
飽和土之 比熱 [Kcal/kg]	飽和土比熱	6.5823	10.7216	15.6447	21.3929	28.9273	38.1918

表 2 案例分類一覽表

	凍結管直徑D(m)	凍結管間距S(m)	熱通量(kw/m ²)
CASE1	0.09	1.15	-19.46
CASE2	0.1	1.15	-17.47
CASE3	0.1	1.2	-17.47
CASE4	0.11	1.4	-15.84
CASE5	0.12	1.53	-14.49
CASE6	0.09	1.2	-19.46
CASE7	0.11	1.2	-15.84
CASE8	0.12	1.4	-14.49
CASE9	0.09	1.1	-19.46
CASE10	0.1	1.1	-17.47
CASE11	0.1	1.3	-17.47
CASE12	0.11	1.1	-15.84
CASE13	0.11	1.15	-15.84
CASE14	0.11	1.3	-15.84
CASE15	0.12	1.1	-14.49
CASE16	0.12	1.15	-14.49
CASE17	0.12	1.2	-14.49
CASE18	0.12	1.3	-14.49
CASE19	0.12	1.5	-14.49

表 3 凍結管間距影響凍土厚度分析案例一覽表

凍結管之直徑與間距	容積含水率								
	直徑 D(m)	間距 S(m)	(S/D)	X ₀	X ₁	X ₂			
case0	0.09	1.1	11.22	0.852	0.851	0.850	0.850	0.849	0.848
case1	0.09	1.2	12.33	0.852	0.856	0.856	0.855	0.854	0.854
case2	0.1	1.1	10.0	0.843	0.843	0.842	0.842	0.841	0.840
case3	0.1	1.2	11.0	0.856	0.859	0.855	0.855	0.854	0.853
case4	0.1	1.3	12.0	0.803	0.808	0.808	0.808	0.808	0.808
case5	0.11	1.1	9.0	0.825	0.825	0.824	0.822	0.823	0.822
case6	0.11	1.2	9.91	0.822	0.822	0.822	0.822	0.821	0.821
case7	0.11	1.3	12.82	0.826	0.826	0.826	0.825	0.825	0.825
case8	0.11	1.4	11.73	0.856	0.856	0.856	0.856	0.856	0.855
case9	0.12	1.1	8.17	0.826	0.828	0.819	0.818	0.817	0.816
case10	0.12	1.2	9.0	0.814	0.813	0.813	0.813	0.813	0.813
case11	0.12	1.3	9.83	0.825	0.825	0.825	0.824	0.824	0.824
case12	0.12	1.4	10.57	0.845	0.844	0.844	0.844	0.844	0.843
case13	0.12	1.5	11.5	0.850	0.850	0.850	0.850	0.850	0.850

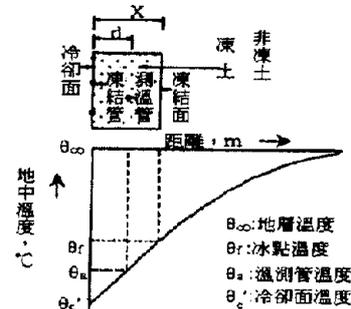


圖 1 凍土與非凍土成長曲線[2]

- Booker, J.R., and Savvidou, C., "Consolidation Around a Spherical Heat Source," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 20, pp. 1079-1090, 1984.
- Booker, J.R., and Savvidou, C., "Consolidation Around a Point Heat Source," *International Journal for the Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 9, pp. 173-184, 1985.
- Corapcioglu, M.Y., and Bear, J., "A Mathematical Model for Regional Land Subsidence Due to Pumping, 3, Integrated Equations for a Phreatic Aquifer," *Water Resources Research*, Vol. 19, pp. 895-908, 1983.
- Lewis, R.W., and Schrefler, B.A., "A Fully Coupled Consolidation Model of the Subsidence of Venice," *Water Resources Research*, Vol. 14, No. 2, pp. 223-230, 1978a.
- Lewis, R.W., and Schrefler, B.A., "A Finite Element Analysis of Surface Subsidence," in S.K. Saxena(ed.), Evaluation and Prediction of Subsidence, ASCE, New York, pp. 400-416, 1978b.
- Lu, J. C.-C., Chiu, W.-C., and Lin, F.-T., "Analysis of a Buried Deep Point/Line Heat Source in a Cross-Anisotropic Porous Elastic Medium," *Proceedings of the 8th Conference of Advanced Technology Council in Mathematics*, pp. 162-171, 2003.
- Safai, N.M., and Pinder, G.F., "Vertical and Horizontal Land Deformation in a Desaturating Porous Medium," *Advanced Water Resources*, Vol. 2, No. 1, pp. 19-25, 1979.
- Safai, N.M., and Pinder, G.F., "Vertical and Horizontal Land Deformation Due to Fluid Withdrawal," *International Journal for the Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 4, pp. 131-142, 1980.
- Savvidou, C., and Booker, J.R., "Consolidation Around a Heat Source Buried Deep in a Porous Thermoelastic Medium with Anisotropic Flow Properties," *International Journal for the Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 13, No. 1, pp. 75-90 1989.
- Schiffman, R.L., "A Thermoelastic Theory of Consolidation," Environmental and Geophysical Heat Transfer, C.J. Cremers, *et al.*,(eds.), ASME, Vol.4, New York, pp.78-84, 1971.
- Tarn, J.Q., and Lu, C.C., "Analysis of Subsidence Due to a Point Sink in an Anisotropic Porous Elastic Half Space," *International Journal for the Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 15, No. 8, pp. 573-592, 1991.
- Terzaghi, K., Theoretical Soil Mechanics, John Wiley & Sons, New York, 1943.
- Yeh, H.-D., Lu, R.-H., and Yeh, G.-T., "Finite Element Modelling for Land Displacements Due to Pumping," *International Journal for the Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 20, pp. 79-99, 1996.

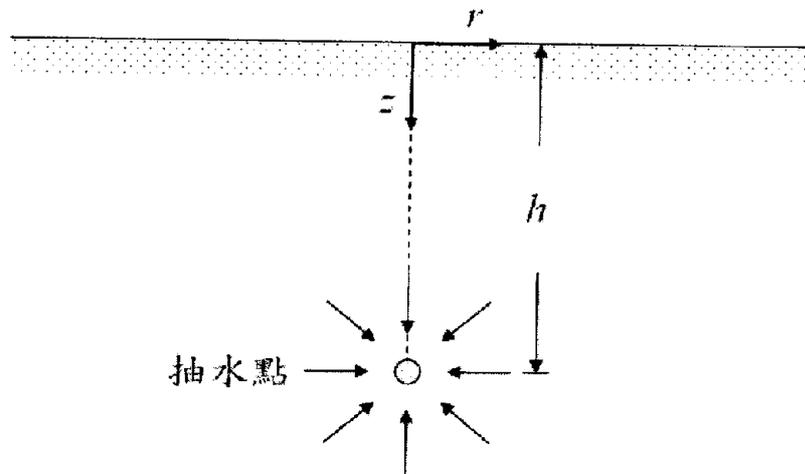


圖 1 半無限域點狀溫泉抽水問題示意圖

以下論文已發表，論文基本資料如下：

呂志宗、林憲俞，2004/10/14，「溫泉管線引致之地層力學行為變化理論解析」，九十三年度農業工程研討會論文集，第 117-128 頁。(本文係在國科會研究計畫 NSC93-2625-Z-216-001 補助下所完成。)

溫泉管線引致之地層力學行為變化的理論解析

Theoretical Analysis of Hot Spring Piping Induced Mechanical Behaviors of the Stratum

中華大學土木工程學系

副教授

碩士班研究生

呂志宗

林憲俞

John C.-C. Lu

Hsien-Yu Lin

摘 要

本文基於已研討出之點熱源作用所引致的半無限域地層力學行為變化之解，對此解作適當之線積分，推導出水平溫泉管線長期作用所引致之地層位移、超額孔隙水壓及溫度變化量等。數學模式中，將地層模擬為均質之橫向等向性介質。基本控制方程式係引用牛頓第二運動定律、質量守恆定律、能量守恆定律、Darcy 定律、Fourier 熱傳導定律等加以建立，所研討出之解為穩態閉合解。

關鍵詞：溫泉管線，線熱源，閉合解

Abstract

This paper studies the long-term thermal elastic responses for a saturated elastic half-space containing a horizontal hot spring piping of constant strength. The study is extended from previous investigation of stratum behavior due to a point heat source. Line integral was applied to derive the closed-form solutions of ground deformation, excess pore water pressure and temperature changes of the stratum. The soil mass of the earth medium is modeled as homogeneous cross-anisotropic medium. The governing equations are formulated by Newton's second law, mass balance principle, energy balance principle, Hooke's law, Darcy's Law and Fourier's heat conduction law, *etc.* The derived solutions are steady-state closed-form solutions.

Keywords: Hot Spring Piping, Line Heat Source, Closed-Form Solution

一、前言

地層產生溫度變化的因素有許多，有些原因是屬於大自然的力量，有些則是人為因素所致。例如大氣溫度的變化、岩漿活動、核廢料掩埋場所產生的輻射熱、垃圾掩埋場的悶燒現象、溫泉管線或輸油管線之設施、以及在軟弱地盤上施工所採用的冰凍工法等，均可能引致地層溫度發生變化。其中溫泉管線所引致之地層力學行為變化，即為本

文之研究重點。

本文旨在探討橫向等向性 (Cross-Anisotropic) 半無限域 (Half-Space) 地層受有限長度水平溫泉管線作用時之閉合解 (Closed-Form Solution)，所引用之理論為多孔介質熱彈性力學理論 (Thermo-poroelasticity)。多孔介質熱彈性力學理論係源自於 Biot (1941, 1955) 所提出之三維壓密理論，理論模式中考慮孔隙水和固體介質均可壓縮，在探討具孔隙性質之地層力學問題時，亦常採用此一理論來建立合理之數學模式。而多孔介質熱彈性力學理論則是在理論模式中，再加入熱能效應的影響。理論模式中，考慮多孔介質中之力學行為必須遵守牛頓第二運動定律與虎克定律，孔隙流體的流動應遵守 Darcy 定律與質量守恆定律，而熱能的擴散傳輸則符合 Fourier 熱傳導定律以及能量守恆定律等。

以往已有許多學者專家曾探討地層因溫度變化所引起的地層力學行為變化問題。例如 Schiffman (1971) 根據 Biot (1941) 之多孔介質彈力模式，曾引用 Fourier 熱傳導定律與能量守恆定律，探討多孔介質熱彈性力學問題；Booker 與 Savvidou (1984, 1985, 1989) 亦曾將熱流效應的影響加入 Biot 所建立之理論，推導出地層受點熱源、球體熱源以及異向性滲流情況之多孔介質熱彈性力學問題；Aversa 和 Evangelista (1993) 則對 Neapolitan 地區的黃凝灰岩作過熱膨脹性質之探討。Amadei 等學者 (1987) 曾探討橫向等向性岩層受應力時之閉合解；Aversa 和 Evangelista (1993) 則對 Neapolitan 地區的黃凝灰岩作過熱膨脹性質的探討；Al-Nimr 以及 Naji (1999) 曾說明沉積岩等具有橫向等向性之熱傳輸現象。

以上之研討，均尚未探討有關溫泉管線熱源對橫向等向性地層力學行為變化等的影響，此一研究重點，本文將深入加以研究。本文擬根據 Lu (1998) 已研討出之點熱源影響下之地層力學行為變化及溫度變化等之穩態 (Steady-State) 基本解 (Fundamental Solution)，再進一步應用適當之線積分方式，探討有限長度水平溫泉管線熱源長期作用下，所引起之地層力學行為變化等，所研討出之解為穩態閉合解。以下之章節，先介紹點熱源所引致半無限域地層力學行為變化問題之解，再據以說明水平溫泉管線熱源所引起之半無限域地層力學行為變化問題的閉合解。

二、點熱源問題之數學模式

2.1 橫向等向性多孔隙地層之熱彈性力學理論

2.1.1 介質位移、孔隙流體壓力與介質溫度變化量方程式

本文首先探討如圖 1 所示半無限域地層受深度為 h 之點熱源作用問題的數學模式及其閉合解。所引用之多孔介質熱彈性力學理論，其主要研究對象為固體部分所組成的多孔介質、流經孔隙之流體以及熱量之擴散傳輸現象。多孔隙地層在受外力作用、流體流動或熱能流動時，都會造成多孔隙地層本身之各項物理量產生變化，例如其體積、應力、溫度、超額孔隙水壓等均會產生變化。茲以微小之代表性元素體分析多孔隙地層之力平衡、質量守恆、與能量守恆等方程式，且考慮元素中之固體介質和孔隙流體具有相同的溫度。在點熱源作用情況下，若讓座標 z 軸通過點熱源，則問題可考慮為軸對稱。

當多孔介質之應變量很微小時，則多孔介質之應變 ε_{ij} ($i, j = r, \theta, z$) 和位移 u_i ($i = r, \theta, z$) 的線性關係式，可以軸對稱圓柱座標 (r, z) 表示為：

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad (1)$$

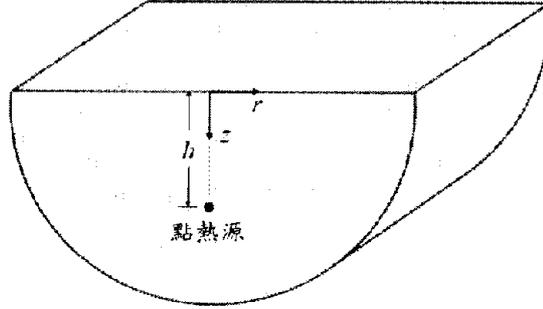


圖 1 半無限域多孔隙地層受深度為 h 之點熱源作用示意圖

其中 $u_\theta = 0$ ，因問題為軸對稱。令作用於多孔隙地層之總應力 (Total Stress) 為 τ_{ij} (張力為正)、作用於固體介質之有效應力 (Effective Stress) 為 σ'_{ij} (張力為正)、超額孔隙水壓力為 p (壓力為正)、地層之溫度變化量為 θ ，再根據 Terzaghi (1943) 的有效應力觀念 $\tau_{ij} = \sigma'_{ij} - p\delta_{ij}$ (δ_{ij} 為 Kronecker delta)，則：

$$\tau_{rr} = A\varepsilon_{rr} + (A - 2N)\varepsilon_{\theta\theta} + F\varepsilon_{zz} - \beta_r\theta - p, \quad (2a)$$

$$\tau_{\theta\theta} = (A - 2N)\varepsilon_{rr} + A\varepsilon_{\theta\theta} + F\varepsilon_{zz} - \beta_r\theta - p, \quad (2b)$$

$$\tau_{zz} = F\varepsilon_{rr} + F\varepsilon_{\theta\theta} + C\varepsilon_{zz} - \beta_z\theta - p, \quad (2c)$$

$$\tau_{rz} = 2L\varepsilon_{rz}, \quad (2d)$$

其中參數 A 、 C 、 F 、 L 、 N 、 β_r 、 β_z 與 E_r 、 E_z 、 G_{rz} 、 $\nu_{r\theta}$ 、 ν_{rz} 、 α_{sr} 、 α_{sz} 等參數之基本關係如下：

$$A = \frac{E_r(1 - \nu_{rz}\nu_{zr})}{(1 + \nu_{r\theta})(1 - \nu_{r\theta} - 2\nu_{rz}\nu_{zr})}, \quad (3a)$$

$$C = \frac{E_z(1 - \nu_{r\theta})}{1 - \nu_{r\theta} - 2\nu_{rz}\nu_{zr}}, \quad (3b)$$

$$F = \frac{E_z\nu_{rz}}{1 - \nu_{r\theta} - 2\nu_{rz}\nu_{zr}} = \frac{E_r\nu_{zr}}{1 - \nu_{r\theta} - 2\nu_{rz}\nu_{zr}}, \quad (3c)$$

$$L = G_{rz}, \quad (3d)$$

$$N = \frac{E_r}{2(1 + \nu_{r\theta})}, \quad (3e)$$

$$\beta_r = 2(A - N)\alpha_{sr} + F\alpha_{sz}, \quad (3f)$$

$$\beta_z = 2F\alpha_{sr} + C\alpha_{sz}, \quad (3g)$$

式中符號 E_r 、 E_z 分別為地層水平暨垂直方向上之楊氏係數 (Young's Modulus)； $\nu_{r\theta}$ 是地層水平面上測得之波松比 (Poisson's Ratio)； ν_{rz} 、 ν_{zr} 均為地層垂直面上測得之波松比，而 $\nu_{rz}/E_r = \nu_{zr}/E_z$ ； G_{rz} 係地層垂直面上測得之剪力模數； α_{sr} 、 α_{sz} 分別為固體介質在水平方向暨垂直方向上之線性熱膨脹係數 (Linear Thermal Expansion Coefficient)。當地層各項性質考慮為等向性時，則 $A=C=\lambda+2G$ ； $F=\lambda$ ； $L=N=G$ ； $\beta_r = \beta_z = (2G+3\lambda)\alpha_s$ ；其中 $\lambda=2G\nu/(1-2\nu)$ 與 $G=E/2(1+\nu)$ 為等向性地層的 Lamé 常數與剪力模數； E 為等向性地層之楊氏係數； α_s 為固體介質之線性熱膨脹係數。

作用於地層之總應力需滿足力平衡方程式 $\tau_{ij,j} + f_i = 0$ ，在軸對稱情況下，力平衡方程式如以下所示：

$$\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + f_r = 0, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + f_z = 0, \quad (4b)$$

其中 f_i ($i=r, z$) 表微體力 (Body Force)。若先將式(1)代入式(2a)-(2d)，再將式(2a)-(2d)代入力平衡方程式(4a)-(4b)中，且不考慮微體力的影響，則軸對稱多孔介質熱彈性力學問題之基本方程式可以地層位移 u 、地層介質溫度改變量 ϑ 和超額孔隙水壓 p 等表為：

$$A \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + L \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + (F+L) \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} - \beta_r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (5a)$$

$$(F+L) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + L \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + C \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \beta_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (5b)$$

其中微分運算子 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 。

2.1.2 流量連續方程式和熱平衡方程式

本文將均質地層模擬為橫向等向性之線彈性介質，其中孔隙流體的流動和熱能之擴散傳輸等需分別符合質量守恆定律和能量守恆定律，如以下所示：

$$-\nabla \cdot [n(\mathbf{v}_w - \mathbf{v}_s)] + q_w = 0, \quad (6a)$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{h}_e + q_h = 0, \quad (6b)$$

其中 \mathbf{v}_w 與 \mathbf{v}_s 分別為孔隙水與固體之位移速度； \mathbf{h}_e 係熱流率； n 是多孔介質之孔隙率 (Porosity)； q_w 與 q_h 分別是作用於地層之水源與熱源。因僅考慮熱源的作用，故 $q_w = 0$ 。

地層中孔隙水之流動需滿足 Darcy 定律，地層中之熱傳導現象需滿足 Fourier 定律，亦即：

$$n(\mathbf{v}_w - \mathbf{v}_s) = -\frac{k_r}{\gamma_w} \frac{\partial p}{\partial r} \mathbf{i}_r - \frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{i}_z, \quad (7a)$$

$$h_c = -\lambda_r \frac{\partial g}{\partial r} i_r - \lambda_z \frac{\partial g}{\partial z} i_z, \quad (7b)$$

式中 k_r 與 k_z 分別為地層水平暨垂直方向上之滲透係數 (Permeability); γ_w 為孔隙水之單位重; λ_r 及 λ_z 分別為地層在水平方向和垂直方向之熱傳導係數 (Thermal Conductivity)。

將方程式(7a)、(7b)分別代入式(6a)、(6b)，並考慮有一個強度為 Q (焦耳/秒)、深度為 h 之點熱源作用在座標 $(0, h)$ 位置上，則可推得另兩個基本控制方程式如下：

$$\frac{k_r}{\gamma_w} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0, \quad (8a)$$

$$\lambda_r \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \lambda_z \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} + \frac{Q}{2\pi r} \delta(r) \delta(z-h) = 0, \quad (8b)$$

式中 $\delta(x)$ 是 Dirac delta 函數。式(5a)、(5b)、(8a)與(8b)組成問題之基本方程式。只要以上所研討的點熱源作用於橫向等向性地層之閉合解可以研討出，則工程上溫泉管線作用所引致之地層力學行為變化，可藉由對所研討出之解作適當之線積分而研討出。

2.2 邊界條件與初始條件

茲考慮熱源係埋置於淺層地層，故將地層模擬為一半無限域介質。因係考慮地層受熱後之長期變化，所以數學模式中之時間變數並不會出現。又在地表邊界位置 ($z=0$) 上考慮無應力變化、無孔隙水壓變化 (透水情況) 且無溫度變化 (恆溫狀態) 等，因此在此邊界上之邊界條件可表為：

$$\sigma'_{zz}(r,0), \sigma'_{rz}(r,0), p(r,0)=0, g(r,0)=0. \quad (9)$$

在無限深遠處 ($z \rightarrow \infty$)，其地層位移、超額孔隙水壓和地層溫度變化量等應不會受點熱源的影響。所以無限深遠處之邊界條件可表為：

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \{u_r(r,z)\} \rightarrow 0, \lim_{z \rightarrow \infty} \{u_z(r,z)\} \rightarrow 0, \lim_{z \rightarrow \infty} \{p(r,z)\} \rightarrow 0, \lim_{z \rightarrow \infty} \{g(r,z)\} \rightarrow 0. \quad (10)$$

本文係考慮問題之各項初始條件均為零。由式(8a)得知，在穩態情況下，流量連續方程式僅與超額孔隙水壓 p 有關，若與 p 相關之初始條件與邊界條件等均為零，則所研討出之超額孔隙水壓 p 即可預知其亦為零。

三、點熱源作用引致之半無限域地層力學行為變化的閉合解

本文係引用積分轉換方法解析如圖 1 所示點熱源問題之數學模式，所採用的方法為 Hankel 積分轉換和 Fourier 積分轉換方法，推導出半無限域地層受點熱源作用之穩態閉合解。若考慮地層之力學、滲流與熱流等行為均為等向性，則所推導出之半無限域地層受點熱源作用之地層位移、超額孔隙水壓、及地層溫度變化量等之穩態基本解可表示如下 (Lu, 1998)：

$$u_r = \frac{Q}{4\pi\lambda_{iz}} \left(a_1^* \frac{r}{R_1^*} + a_2^* \frac{r}{R_2^*} + a_3^* \frac{r}{R_3^*} + c_1 \frac{r}{R_1} + c_2 \frac{r}{R_2} + c_3 \frac{r}{R_3} + c_4 \frac{r}{R_4} + c_5 \frac{r}{R_5} + c_6 \frac{r}{R_6} + c_7 \frac{r}{R_7} \right), \quad (11a)$$

$$u_z = \frac{Q}{4\pi\lambda_{iz}} \left[b_1^* \sinh^{-1} \frac{\mu_1(z-h)}{r} + b_2^* \sinh^{-1} \frac{\mu_2(z-h)}{r} + b_3^* \sinh^{-1} \frac{\mu_3(z-h)}{r} \right. \\ \left. + S_1 c_1 \sinh^{-1} \frac{\mu_1(z+h)}{r} + S_1 c_2 \sinh^{-1} \frac{\mu_1 z + \mu_2 h}{r} + S_1 c_3 \sinh^{-1} \frac{\mu_1 z + \mu_3 h}{r} + S_2 c_4 \sinh^{-1} \frac{\mu_2 z + \mu_1 h}{r} \right. \\ \left. + S_2 c_5 \sinh^{-1} \frac{\mu_2(z+h)}{r} + S_2 c_6 \sinh^{-1} \frac{\mu_2 z + \mu_3 h}{r} + S_3 c_7 \sinh^{-1} \frac{\mu_3(z+h)}{r} \right], \quad (11b)$$

$$p = 0, \quad (11c)$$

$$g = \frac{Q}{4\pi\mu_3\lambda_{iz}} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + \mu_3^2(z-h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \mu_3^2(z+h)^2}} \right], \quad (11d)$$

$$\text{式 中 } R_i^* = \sqrt{r^2 + \mu_i^2(z-h)^2} + \mu_i|z-h|, (i=1,2,3); R_1 = \sqrt{r^2 + \mu_1^2(z+h)^2} + \mu_1(z+h),$$

$$R_2 = \sqrt{r^2 + (\mu_1 z + \mu_2 h)^2} + \mu_1 z + \mu_2 h, R_3 = \sqrt{r^2 + (\mu_1 z + \mu_3 h)^2} + \mu_1 z + \mu_3 h,$$

$$R_4 = \sqrt{r^2 + (\mu_2 z + \mu_1 h)^2} + \mu_2 z + \mu_1 h, R_5 = \sqrt{r^2 + \mu_2^2(z+h)^2} + \mu_2(z+h),$$

$$R_6 = \sqrt{r^2 + (\mu_2 z + \mu_3 h)^2} + \mu_2 z + \mu_3 h, R_7 = \sqrt{r^2 + \mu_3^2(z+h)^2} + \mu_3(z+h);$$

$$a_1^* = \frac{a_1}{CL(\mu_1^2 - \mu_2^2)(\mu_1^2 - \mu_3^2)}, a_2^* = \frac{a_2}{CL(\mu_2^2 - \mu_1^2)(\mu_2^2 - \mu_3^2)}, a_3^* = \frac{a_3}{CL(\mu_3^2 - \mu_1^2)(\mu_3^2 - \mu_2^2)};$$

$$b_1^* = \frac{b_1}{CL(\mu_1^2 - \mu_2^2)(\mu_1^2 - \mu_3^2)}, b_2^* = \frac{b_2}{CL(\mu_2^2 - \mu_1^2)(\mu_2^2 - \mu_3^2)}, b_3^* = \frac{b_3}{CL(\mu_3^2 - \mu_1^2)(\mu_3^2 - \mu_2^2)};$$

$$a_i = \frac{1}{\mu_i} \{ L\beta_r + [(F+L)\beta_z - C\beta_r] \mu_i^2 \}, (i=1,2,3); b_i = L\beta_z \mu_i^2 + (F+L)\beta_r - A\beta_z, (i=1,2,3);$$

$$c_1 = \frac{(C\mu_1^2 - L)[\mu_2(Fa_1 + C\mu_1 b_1) - L(\mu_1 a_1 - b_1)]}{CL^2(C\mu_1^2 + F)(\mu_2 - \mu_1)(\mu_1^2 - \mu_2^2)(\mu_1^2 - \mu_3^2)},$$

$$c_2 = \frac{(C\mu_1^2 - L)[\mu_2(Fa_2 + C\mu_2 b_2) - L(\mu_2 a_2 - b_2)]}{CL^2(C\mu_1^2 + F)(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2^2 - \mu_1^2)(\mu_2^2 - \mu_3^2)},$$

$$c_3 = \frac{C\mu_1^2 - L}{L(C\mu_1^2 + F)(\mu_2 - \mu_1)S_4} \left[\frac{(C\mu_2 \mu_3 + L)b_3 + La_3 S_3}{\mu_3 a_3} - 2L + C\mu_2 S_3 \right],$$

$$c_4 = \frac{(C\mu_2^2 - L)[-\mu_1(Fa_1 + C\mu_1 b_1) + L(\mu_1 a_1 - b_1)]}{CL^2(C\mu_2^2 + F)(\mu_2 - \mu_1)(\mu_1^2 - \mu_2^2)(\mu_1^2 - \mu_3^2)},$$

$$c_5 = \frac{(C\mu_2^2 - L)[-\mu_1(Fa_2 + C\mu_2 b_2) + L(\mu_2 a_2 - b_2)]}{CL^2(C\mu_2^2 + F)(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2^2 - \mu_1^2)(\mu_2^2 - \mu_3^2)},$$

$$c_6 = \frac{C\mu_2^2 - L}{L(C\mu_2^2 + F)(\mu_2 - \mu_1)S_4} \left[\frac{-(C\mu_1\mu_3 + L)b_3 - La_3S_3}{\mu_3a_3} + 2L - C\mu_1S_3 \right], \quad c_7 = -\frac{1}{\mu_3S_4};$$

$$S_i = \frac{-A + \mu_i^2 L}{\mu_i(F+L)}, \quad (i=1,2); \quad S_3 = \frac{\mu_3 [L\beta_z\mu_3^2 + (F+L)\beta_r - A\beta_z]}{[(F+L)\beta_z - C\beta_r]\mu_3^2 + L\beta_r},$$

$$S_4 = \frac{CL\mu_3^4 - [AC - F(F+2L)]\mu_3^2 + AL}{[(F+L)\beta_z - C\beta_r]\mu_3^2 + L\beta_r};$$

特徵根 μ_1 與 μ_2 為特徵方程式 $CL\mu^4 - [AC - F(F+2L)]\mu^2 + AL = 0$ 之根；又特徵根 $\mu_3 = \sqrt{\lambda_r/\lambda_z}$ 。若考慮地層之力學性質與熱傳導性質為等向性，則 $\mu_3 = 1$ 。再引用 L'Hospital 定則即可得出以下所示之閉合解：

$$u_r(r, z) = \frac{(1+\nu)\alpha_s Q}{8\pi(1-\nu)\lambda_1} \left[\frac{r}{R_1} - \frac{r}{R_2^*} + (3-4\nu) \frac{rh}{R_2^*R_2} - \frac{rz}{R_2^*R_2} - \frac{2hrz}{R_2^3} \right], \quad (12a)$$

$$u_z(r, z) = \frac{(1+\nu)\alpha_s Q}{8\pi(1-\nu)\lambda_1} \left[\frac{z-h}{R_1} - (3-4\nu) \frac{h}{R_2} - \frac{z}{R_2} - \frac{2hz(z+h)}{R_2^3} \right], \quad (12b)$$

$$p(r, z) = 0, \quad (12c)$$

$$\vartheta(r, z) = \frac{Q}{4\pi\lambda_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (12d)$$

式中 $R_1 = \sqrt{r^2 + (z-h)^2}$ ； $R_2 = \sqrt{r^2 + (z+h)^2}$ ； $R_2^* = \sqrt{r^2 + (z+h)^2} + z+h$ 。由式(11c)與(12c)知，在穩態情況下，因考慮初始超額孔隙水壓為零，且邊界上之超額孔隙水壓亦為零，故半無限域地層受點熱源影響之長期的超額孔隙水壓為零。

四、溫泉管線作用引致之半無限域地層力學行為變化的閉合解

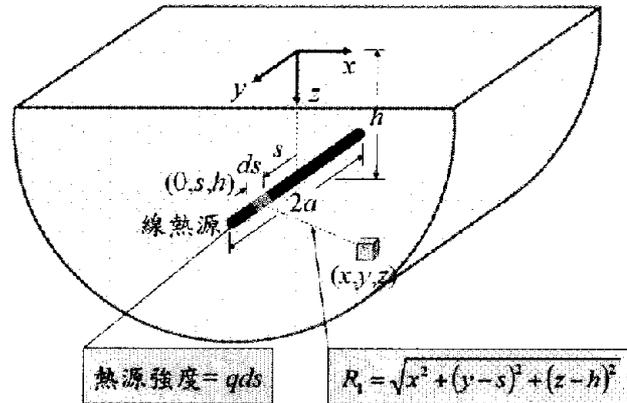


圖 2 半無限域地層受長度為 $2a$ 之水平溫泉管線熱源作用示意圖

本單元根據如式(11a)-(11d)與式(12a)-(12d)所示之點熱源引致之地層力學行為變化之基本解，擬進一步以線積分方式探討如圖 2 所示半無限域地層受長度為 $2a$ 之溫泉管線作用時之力學行為變化等。在進行線積分之前，須先將點熱源影響下之基本解進行座

標轉換。即考慮基本解在圓柱座標 (r, θ, z) 與卡氏座標 (x, y, z) 中應滿足以下之關係：

$$u_x(x, y, z) = u_r(r, \theta, z) \cos \theta - u_\theta(r, \theta, z) \sin \theta, \quad (13a)$$

$$u_y(x, y, z) = u_r(r, \theta, z) \sin \theta + u_\theta(r, \theta, z) \cos \theta, \quad (13b)$$

$$u_z(x, y, z) = u_z(r, \theta, z), \quad (13c)$$

$$p(x, y, z) = p(r, \theta, z), \quad (13d)$$

$$g(x, y, z) = g(r, \theta, z), \quad (13e)$$

因點熱源問題為軸對稱，故其中之 $u_\theta = 0$ ；另外，圓柱座標系統下之變數 r 應滿足 $r^2 = x^2 + y^2$ 的關係式。

茲於如圖 2 所示溫泉管線熱源上取長度為 ds 之一小段線熱源作分析，因單位長度之溫泉管線熱源強度為 q (焦耳/公尺/秒)，故 qds 恰好對應於點熱源問題之熱源強度 Q (焦耳/秒)。此外，點熱源問題之基本解中的變數 $R_1 = \sqrt{r^2 + (z-h)^2}$ ，係表示地層中之任意點至點熱源間之距離，因此溫泉管線熱源問題中，地層內之任意點 (x, y, z) 至 qds 之距離應改寫為 $R_1 = \sqrt{x^2 + (y-s)^2 + (z-h)^2}$ 。其它相關之項次亦應依此觀念作調整，最後再對變數 s 作 $-a$ 至 a 的線積分，並應用能進行符號運算之軟體 Mathematica 以及數學工具書 (Abramowitz 與 Stegun, 1970) 進行線積分之運算，即可研討出溫泉管線熱源問題之閉合解。基於此，則所研討出之地層位移、超額孔隙水壓力、與地層溫度變化量等可表為：

$$\begin{aligned} u_x = \frac{Q}{4\pi\lambda_z} & [a_1^* f^*(x, y, \mu_1 | z-h) + a_2^* f^*(x, y, \mu_2 | z-h) + a_3^* f^*(x, y, \mu_3 | z-h) \\ & + c_1 f(x, y, \mu_1 z + \mu_1 h) + c_2 f(x, y, \mu_1 z + \mu_2 h) + c_3 f(x, y, \mu_1 z + \mu_3 h) + c_4 f(x, y, \mu_2 z + \mu_1 h) \\ & + c_5 f(x, y, \mu_2 z + \mu_2 h) + c_6 f(x, y, \mu_2 z + \mu_3 h) + c_7 f(x, y, \mu_3 z + \mu_3 h)] , \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} u_y = \frac{Q}{4\pi\lambda_z} & [a_1^* g^*(x, y, \mu_1 | z-h) + a_2^* g^*(x, y, \mu_2 | z-h) + a_3^* g^*(x, y, \mu_3 | z-h) \\ & + c_1 g(x, y, \mu_1 z + \mu_1 h) + c_2 g(x, y, \mu_1 z + \mu_2 h) + c_3 g(x, y, \mu_1 z + \mu_3 h) + c_4 g(x, y, \mu_2 z + \mu_1 h) \\ & + c_5 g(x, y, \mu_2 z + \mu_2 h) + c_6 g(x, y, \mu_2 z + \mu_3 h) + c_7 g(x, y, \mu_3 z + \mu_3 h)] , \end{aligned} \quad (14b)$$

$$\begin{aligned} u_z = \frac{Q}{4\pi\lambda_z} & [b_1^* h(x, y, \mu_1 z - \mu_1 h) + b_2^* h(x, y, \mu_2 z - \mu_2 h) + b_3^* h(x, y, \mu_3 z - \mu_3 h) \\ & + S_1 c_1 h(x, y, \mu_1 z + \mu_1 h) + S_1 c_2 h(x, y, \mu_1 z + \mu_2 h) + S_1 c_3 h(x, y, \mu_1 z + \mu_3 h) \\ & + S_2 c_4 h(x, y, \mu_2 z + \mu_1 h) + S_2 c_5 h(x, y, \mu_2 z + \mu_2 h) + S_2 c_6 h(x, y, \mu_2 z + \mu_3 h) \\ & + S_3 c_7 h(x, y, \mu_3 z + \mu_3 h)] , \end{aligned} \quad (14c)$$

$$p = 0, \quad (14d)$$

$$g = \frac{q}{4\pi\lambda_l} \left[\ln \frac{R_{(\sigma, \mu_1 z, -\mu_1 h)} + y + a}{R_{(-a, \mu_1 z, -\mu_1 h)} + y - a} - \ln \frac{R_{(a, \mu_2 z, \mu_2 h)} + y + a}{R_{(-a, \mu_2 z, \mu_2 h)} + y - a} \right], \quad (14e)$$

其中函數 f^* 、 f 、 g^* 、 g 、 h 可表示如下：

$$\begin{aligned}
f'(x, y, \mu_i | z-h) &= x \ln \frac{R_{(\alpha, \mu, z, -\mu, h)} + y + a}{R_{(-\alpha, \mu, z, -\mu, h)} + y - a} - \frac{\mu_i |z-h|}{2} \left\{ \tan^{-1} \frac{2x(y+a)}{x^2 - (y+a)^2} + \tan^{-1} \frac{2x(y-a)}{x^2 - (y-a)^2} \right. \\
&+ \tan^{-1} \frac{2x(y+a)[x^2 + \mu_i^2(z-h)^2 + \mu_i z R_{(\alpha, \mu, z, -\mu, h)}]}{[x^2 + \mu_i^2(z-h)^2 + \mu_i z R_{(\alpha, \mu, z, -\mu, h)}]^2 - x^2(y+a)^2} \\
&+ \tan^{-1} \frac{2x(y-a)[x^2 + \mu_i^2(z-h)^2 + \mu_i z R_{(-\alpha, \mu, z, -\mu, h)}]}{[x^2 + \mu_i^2(z-h)^2 + \mu_i z R_{(-\alpha, \mu, z, -\mu, h)}]^2 - x^2(y-a)^2} \\
&+ \tan^{-1} \frac{-2x(y+a)[x^2 + \mu_i^2(z-h)^2 + \mu_i |z-h| R_{(\alpha, \mu, z, -\mu, h)}]}{[x^2 + \mu_i^2(z-h)^2 + \mu_i |z-h| R_{(\alpha, \mu, z, -\mu, h)}]^2 - x^2(y+a)^2} \\
&+ \tan^{-1} \frac{-2x(y-a)[x^2 + \mu_i^2(z-h)^2 + \mu_i |z-h| R_{(-\alpha, \mu, z, -\mu, h)}]}{[x^2 + \mu_i^2(z-h)^2 + \mu_i |z-h| R_{(-\alpha, \mu, z, -\mu, h)}]^2 - x^2(y-a)^2} \left. \right\} \\
&- \mu_i z \left(\tan^{-1} \frac{y+a}{x} - \tan^{-1} \frac{y-a}{x} \right), \quad (i=1,2,3);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x, y, \mu, z + \mu, h) &= x \ln \frac{R_{(\alpha, \mu, z, \mu, h)} + y + a}{R_{(-\alpha, \mu, z, \mu, h)} + y - a} - \frac{\mu, z + \mu, h}{2} \left[\tan^{-1} \frac{2x(y+a)}{x^2 - (y+a)^2} + \tan^{-1} \frac{2x(y-a)}{x^2 - (y-a)^2} \right. \\
&+ \tan^{-1} \frac{2x(y+a)[x^2 + (\mu, z + \mu, h)^2 + (\mu, z + \mu, h) R_{(\alpha, \mu, z, \mu, h)}]}{[x^2 + (\mu, z + \mu, h)^2 + (\mu, z + \mu, h) R_{(\alpha, \mu, z, \mu, h)}]^2 - x^2(y+a)^2} \\
&+ \tan^{-1} \frac{2x(y-a)[x^2 + (\mu, z + \mu, h)^2 + (\mu, z + \mu, h) R_{(-\alpha, \mu, z, \mu, h)}]}{[x^2 + (\mu, z + \mu, h)^2 + (\mu, z + \mu, h) R_{(-\alpha, \mu, z, \mu, h)}]^2 - x^2(y-a)^2} \\
&\left. - (\mu, z + \mu, h) \left(\tan^{-1} \frac{y+a}{x} - \tan^{-1} \frac{y-a}{x} \right) \right], \quad (i, j=1,2,3);
\end{aligned}$$

$$g'(x, y, \mu_i | z-h) = R_{(\alpha, \mu, z, -\mu, h)} - R_{(-\alpha, \mu, z, -\mu, h)} + \mu_i |z-h| \ln \frac{R_{(-\alpha, \mu, z, -\mu, h)} + \mu_i |z-h|}{R_{(\alpha, \mu, z, -\mu, h)} + \mu_i |z-h|}, \quad (i=1,2,3);$$

$$g(x, y, \mu, z + \mu, h) = R_{(\alpha, \mu, z, \mu, h)} - R_{(-\alpha, \mu, z, \mu, h)} + (\mu, z + \mu, h) \ln \frac{R_{(-\alpha, \mu, z, \mu, h)} + \mu, z + \mu, h}{R_{(\alpha, \mu, z, \mu, h)} + \mu, z + \mu, h}, \quad (i, j=1,2,3);$$

$$\begin{aligned}
h(x, y, \mu, z \pm \mu, h) &= \mu, z \ln \frac{R_{(\alpha, \mu, z, \pm \mu, h)} + y + a}{R_{(-\alpha, \mu, z, \pm \mu, h)} + y - a} \pm \mu, h \ln \frac{R_{(\alpha, \mu, z, \pm \mu, h)} + y + a}{R_{(-\alpha, \mu, z, \pm \mu, h)} + y - a} \\
&+ (y+a) \ln \frac{R_{(\alpha, \mu, z, \pm \mu, h)} + \mu, z \pm \mu, h}{\sqrt{x^2 + (y+a)^2}} - (y-a) \ln \frac{R_{(-\alpha, \mu, z, \pm \mu, h)} + \mu, z \pm \mu, h}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2}} \\
&- \left\{ \frac{1}{2} x \left[\tan^{-1} \frac{2x(y+a)}{x^2 - (y+a)^2} - \tan^{-1} \frac{2x(y-a)}{x^2 - (y-a)^2} \right] \right.
\end{aligned}$$

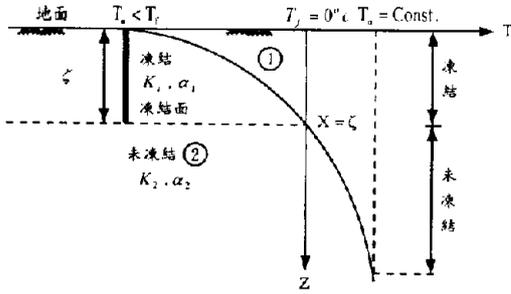


圖 2 Neumann 示意圖 (改繪自姚義久[3])

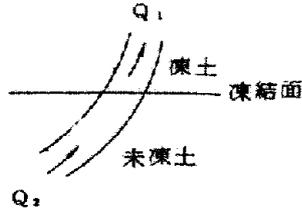


圖 3 土壤熱傳輸示意圖[3]

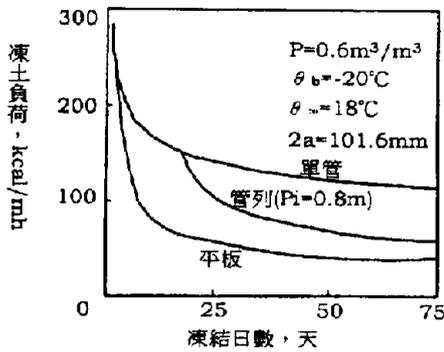


圖 4 不同凍結理論下之凍土負荷曲線[2]

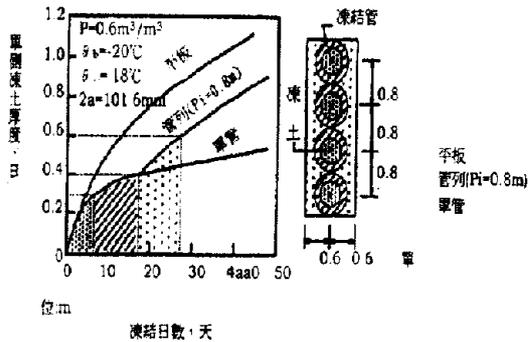


圖 5 凍土厚度與時間之關係[2]

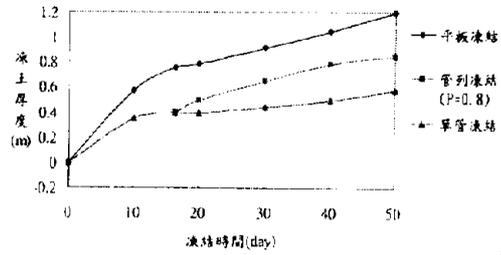


圖 6 管列凍結方式之比較

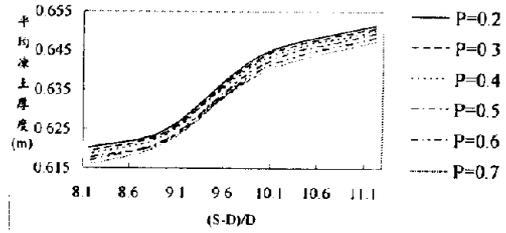


圖 7 凍結管間距為 1.1m 時，凍結管直徑影響凍土厚度分析圖

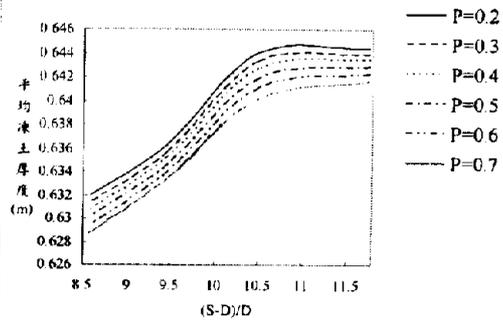


圖 8 凍結管間距為 1.15m 時，凍結管直徑影響凍土厚度分析圖

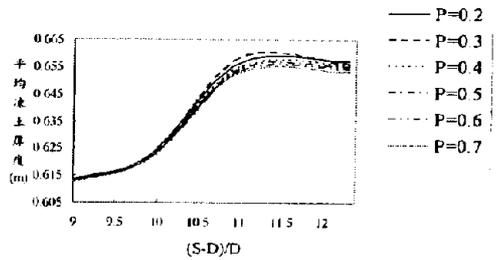


圖 9 凍結管間距為 1.2m 時，凍結管直徑影響凍土厚度分析圖

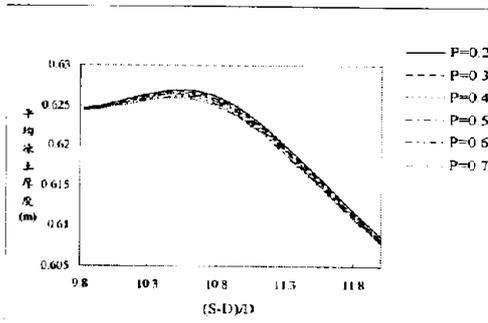


圖 10 凍結管間距為 1.3m 時，凍結管直徑影響凍土厚度分析圖

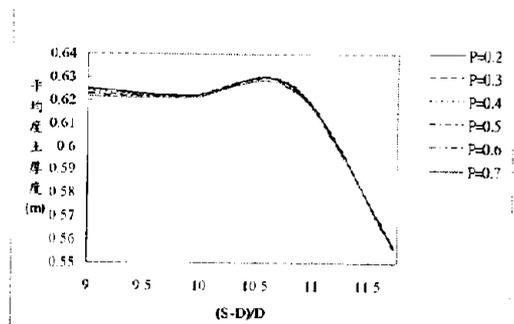


圖 14 凍結管直徑為 0.11m 時，凍結管間距影響凍土厚度分析圖

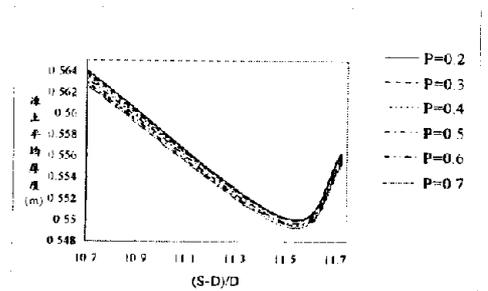


圖 11 凍結管間距為 1.4m 時，凍結管直徑影響凍土厚度分析圖

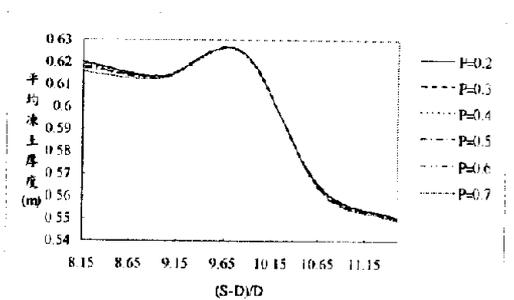


圖 15 凍結管直徑為 0.12m 時，凍結管間距影響凍土厚度分析圖

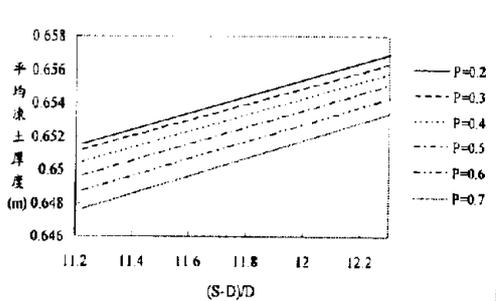


圖 12 凍結管直徑為 0.09m 時，凍結管間距影響凍土厚度分析圖

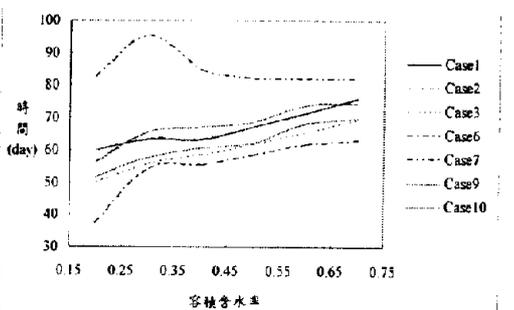


圖 16 CASE1~CASE10 容積含水率對凍結時間的影響

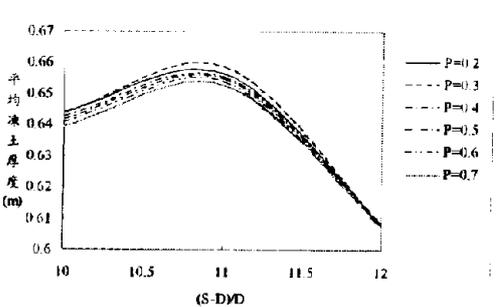


圖 13 凍結管直徑為 0.1m 時，凍結管間距影響凍土厚度分析圖

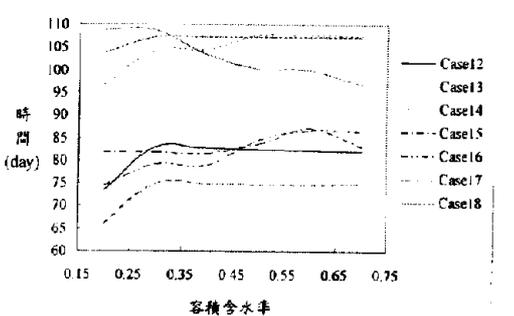


圖 17 CASE11~CASE19 容積含水率對凍結時間的影響

以下論文已發表，論文基本資料如下：

呂志宗，2004/12/3-4，「溫泉抽水引致的橫向等向性地層沉陷之理論解析」，中華民國第二十八屆全國力學會議論文集，第 963-970 頁。(本文係在國科會研究計畫 NSC93-2625-Z-216-001 補助下所完成。)

溫泉抽水引致的橫向等向性地層沉陷之理論解析

呂志宗

中華大學土木工程學系

摘要

本文基於 Biot 所建立之三維壓密模式，考慮含豐富溫泉之半無限域地層為完全飽和的多孔介質，且溫泉補注充分。溫泉抽水時，由於滲流影響，形成負的超額孔隙水壓力，因而地層中作用於溫泉水之應力逐漸轉移至固體顆粒上，當溫泉水達到穩態滲流時，地層形成新的應力平衡狀態，作用於固體部分之有效應力增加，形成壓密沉陷。本文係將地層模擬為橫向等向性之溫泉地層，再引用適當的積分轉換方法，研討出以穩定速率作點狀抽水所引起的壓密沉陷之穩態閉合解，使有助於了解溫泉抽水對地層下陷所造成的影響。

關鍵詞：溫泉抽水、地層下陷、閉合解、橫向等向性地層

一、前言

溫泉觀光業是政府極力推廣的觀光產業之一，然而根據學者專家的研究得知，台灣地區現有的溫泉開發實已逐漸達到飽和，許多業者皆反應無法取得足量的溫泉水源，而必需以非溫泉水源替代、過濾回收或化學製造等方式供應溫泉，亦即台灣地區的溫泉許多實際上均已呈超量開發。作者於 2004 年 9 月 10 日，曾親自聽聞屏東縣四重溪溫泉業者的描述，提及當地現在所取得的溫泉濃度跟十年前比較起來已較淡，這似乎是當地的溫泉已逐漸不足的一項訊息。因此，台灣地區各地的溫泉現況，應有必要定期以科學化的調查方式，建立相關的資料庫，以供政府相關決策單位作參考。溫泉是地下水的一種，若是超量開發，一樣也是會有地層下陷的危險，只因溫泉抽水區的地質條件較

佳或因人煙稀少等因素，而較常被人們所忽略，但是亦應未雨綢繆，瞭解抽取溫泉所可能引致的地層下陷問題，以防範於未然。

溫泉抽水與一般常見的地下水井抽水類似，但考慮溫泉抽水問題時，還應該考慮熱能效應的影響。當溫泉自溫泉脈中被抽出時，地層中作用於溫泉之壓應力會逐漸轉移至地層固體顆粒上，地層形成壓密現象，而導致地層下陷。Terzaghi[1]首先引用有效應力觀念 (Effective Stress Concept) 說明土壤的壓密過程，在 Terzaghi[1]的理論模式中，須先解析出平衡孔隙水壓力，然後再間接計算出壓密沉陷量，故稱之為非耦合 (Uncoupled) 壓密模式。然而 Biot[2, 3]所考慮之孔隙水的平衡過程則與固體介質直接相關，所得出之結果亦被證實較為合理可靠，本文即引用 Biot 壓密模式建立基本方程式。Biot[2, 3]所建立之三維壓密理論，在學理上亦常被稱之為多孔介質彈性力學理論 (Poroelasticity)。基於 Biot[2]的三維壓密理論模式，Bear 與 Corapcioglu[4, 5]以地下水流動觀點，分別研討並解析出受限含水層 (Confined Aquifer) 與非受限含水層 (Unconfined Aquifer) 中因大區域抽水所引致之壓密沉陷問題；Safai 與 Pinder[6, 7]曾以有限元素法解析不飽和土層中之抽水所引致的壓密沉陷；Lewis 與 Schrefler[8, 9]則應用有限元素法作義大利威尼斯城的個案研究；Yeh 等人[10]亦曾以有限元素法研討地層下陷問題。Booker 與 Carter[11, 12]、Tarn 與 Lu[13]亦曾研討出汲水引致的地層壓密問題之閉合解 (Closed-Form Solution)，並探討地表邊界條件與地層異向性對地層壓密沉陷的影響。

以上之研究主要是考慮抽水時，水體積減少暨地層壓力變化對地層下陷的影響。若欲探討溫泉抽水引致的地層下陷問題，則還應考慮溫泉中之熱能流動對地層下陷的影響。雖然溫泉抽水地區之地質條件有可能是屬於土壤或岩層條件，但學理上之模擬，均可採用 Biot[2, 3]所建立之多孔介質彈性力學理論。為考慮溫泉中之熱能效應的影響，必需在多孔介質彈性力學理論中再加入熱能流動所引致的耦合效應，並探討熱能效應對地層力學行為變化的影響，以往這方面的研究亦有許多，說明如下。Schiffman[14]首先根據 Biot[2]壓密模式，並引用 Fourier 熱傳導定律與能量守恆定律，探討熱壓密問題；Booker 與 Savvidou[15-17]曾將熱流效應的影響加入 Biot[2]所建立之多孔介質壓密理論，推導出地層受點熱源、球體熱源以及異向性滲流情況下之多孔介質熱彈性力學 (Thermo-poroelasticity) 問題；Amadei 等學者 [18] 曾探討橫向等向性 (Cross-Anisotropic) 岩層受應力作用時之閉合解；Aversa 和 Evangelista[19]則對 Neapolitan 地區的黃凝灰岩作過熱膨脹性質的探討；Al-Nimr 以及 Naji[20]曾說明沉積岩等具有橫向等向性之熱傳輸現象；Lu 等人[21]則根據點熱源問題之基本解 (Fundamental Solution)，進一步推導出地層受線熱源作用之解。這些文獻之研究係單獨考慮熱能效應對地層力學行為變化的影響，可以這些相關研究成果為基礎，結合抽地下水引致沉陷問題之相關研究，進一步探討溫泉抽水引起的地層下陷問題。

本文將地表面模擬一半無限域 (Half-Space)，而地層之力學性質、熱流性質與滲流性質等皆考慮為橫向等向性。數學模式中，地表邊界是模擬為完全透水暨恆溫情況，以在地表下深度 h 位置，有一點溫泉抽水源模擬溫泉抽水的現象；考慮溫泉地層飽和含水，溫泉補注充分，使抽出的溫泉與補注的溫泉能保持平衡，研討出當溫泉抽水達穩態 (Steady-State) 平衡時所引致的地表長期

沉陷。所得出之結果可供作決策單位正確的科學參考數據，避免不合宜的溫泉開發規劃。因本文所研討出之解為可用簡單函數表示的穩態閉合解，故也可供許多數值分析師在應用數值分析軟體作複雜的計算之前，作分析檢核之用，本文之研究成果具有極高之研究與應用價值。

二、數學模式

2.1 多孔隙地層之熱彈性力學理論

2.1.1 介質位移、孔隙流體壓力與介質溫度變化量方程式

本文係擬探討如圖 1 所示之半無限域溫泉地層因點抽水所引起的沉陷問題，首先介紹問題之數學模式。本研究係引用多孔介質熱彈性力學理論建立基本方程式，茲以微小之代表性元素體 (Representative Elementary Volume) 分析多孔隙溫泉地層之力平衡、質量守恆與能量守恆等方程式，且考慮元素中之固體介質和孔隙流體具有相同的溫度。其主要研究對象為固體部分所組成的多孔介質、流經孔隙之流體以及熱量之擴散傳輸現象。多孔隙溫泉地層在受外力作用、流體流動或熱能流動時，都會造成多孔隙溫泉地層之各項物理量產生變化，例如其體積、應力、溫度、超額孔隙水壓等均會產生變化。在點狀溫泉抽水作用情況下，若讓座標 z 軸通過抽水點，則問題可考慮為軸對稱。當多孔隙溫泉地層之應變量很微小時，則多孔隙溫泉地層之應變 $\varepsilon_{ij}(i, j = r, \theta, z)$ 和位移 $u_i(i = r, \theta, z)$ 的線性關係式，可以軸對稱圓柱座標 (r, z) 表示為：

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad (1)$$

因問題為軸對稱，故並不會產生環向位移量 u_θ ，亦即 $u_\theta = 0$ 。令作用於溫泉地層之總應力 (Total Stress) 為 τ_{ij} (張力為正)、作用於固體介質之有效應力 (Effective

Stress) 為 σ'_{ij} (張力為正)、超額孔隙水壓力為 p (壓力為正)、溫泉地層之溫度變化量為 ϑ ，再根據 Terzaghi[1] 的有效應力觀念 $\tau_{ij} = \sigma'_{ij} - p\delta_{ij}$ (δ_{ij} 為 Kronecker delta)，則：

$$\tau_{rr} = A\varepsilon_{rr} + (A - 2N)\varepsilon_{\theta\theta} + F\varepsilon_{zz} - \beta_r\vartheta - p, \quad (2a)$$

$$\tau_{\theta\theta} = (A - 2N)\varepsilon_{rr} + A\varepsilon_{\theta\theta} + F\varepsilon_{zz} - \beta_r\vartheta - p, \quad (2b)$$

$$\tau_{zz} = F\varepsilon_{rr} + F\varepsilon_{\theta\theta} + C\varepsilon_{zz} - \beta_z\vartheta - p, \quad (2c)$$

$$\tau_{rz} = 2L\varepsilon_{rz}, \quad (2d)$$

其中參數 A 、 C 、 F 、 L 、 N 、 β_r 、 β_z 與 E_r 、 E_z 、 G_{rz} 、 $\nu_{r\theta}$ 、 ν_{rz} 、 α_{sr} 、 α_{sz} 等參數之基本關係如下：

$$A = \frac{E_r(1 - \nu_{rz}\nu_{sr})}{(1 + \nu_{r\theta})(1 - \nu_{r\theta} - 2\nu_{rz}\nu_{sr})}, \quad (3a)$$

$$C = \frac{E_z(1 - \nu_{r\theta})}{1 - \nu_{r\theta} - 2\nu_{rz}\nu_{sr}}, \quad (3b)$$

$$F = \frac{E_z\nu_{rz}}{1 - \nu_{r\theta} - 2\nu_{rz}\nu_{sr}} = \frac{E_r\nu_{sr}}{1 - \nu_{r\theta} - 2\nu_{rz}\nu_{sr}}, \quad (3c)$$

$$L = G_{rz}, \quad (3d)$$

$$N = \frac{E_r}{2(1 + \nu_{r\theta})}, \quad (3e)$$

$$\beta_r = 2(A - N)\alpha_{sr} + F\alpha_{sz}, \quad (3f)$$

$$\beta_z = 2F\alpha_{sr} + C\alpha_{sz}, \quad (3g)$$

式中符號 E_r 、 E_z 分別為地層水平暨垂直方向上之楊氏係數 (Young's Modulus)； $\nu_{r\theta}$ 是地層水平面上測得之波松比 (Poisson's Ratio)； ν_{rz} 、 ν_{sr} 均為地層垂直面上測得之波松比，而 $\nu_{rz}/E_r = \nu_{sr}/E_z$ ； G_{rz} 係地層垂直面上測得之剪力模數； α_{sr} 、 α_{sz} 分別為固體介質在水平方向暨垂直方向上之線性熱膨脹係數 (Linear Thermal Expansion Coefficient)。當地層各項性質皆考慮為等向性時，則 $A = C = \lambda + 2G$ ； $F = \lambda$ ； $L = N = G$ ； $\beta_r = \beta_z = (2G + 3\lambda)\alpha_s$ ；其中 $\lambda = 2G\nu/(1 - 2\nu)$ 與 $G = E/2(1 + \nu)$ 為等向性地層的 Lamé 常數與剪力模數； E 為等向性地層之楊氏係數； α_s 為固體介質之線性熱膨脹係數。

作用於地層之總應力需滿足力平衡方程式 $\tau_{ij,j} + f_i = 0$ ，在軸對稱情況下，力平衡方程式如以下所示：

$$\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + f_r = 0, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + f_z = 0, \quad (4b)$$

其中 f_i ($i = r, z$) 表微體力 (Body Force)。若先將式 (1) 代入式 (2a)-(2d)，再將式 (2a)-(2d) 代入力平衡方程式 (4a)-(4b) 中，且不考慮微體力的影響，則軸對稱多孔介質熱彈性力學問題之基本方程式可以地層位移 u_i 、地層溫度改變量 ϑ 和超額孔隙水壓 p 等表為：

$$A \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + L \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + (F + L) \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} - \beta_r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (5a)$$

$$(F + L) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + L \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + C \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \beta_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (5b)$$

$$\text{其中微分運算子 } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

2.1.2 流量連續方程式和熱平衡方程式

本文將均質地層模擬為橫向等向性之線彈性介質，其中孔隙流體的流動和熱能之擴散傳輸等需分別符合質量守恆定律和能量守恆定律，如以下所示：

$$-\nabla \cdot [n(\mathbf{v}_w - \mathbf{v}_s)] + q_w = 0, \quad (6a)$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{h}_e + q_h = 0, \quad (6b)$$

其中 \mathbf{v}_w 與 \mathbf{v}_s 分別為孔隙水與固體之位移速度； \mathbf{h}_e 係熱流率； n 是多孔介質之孔隙率 (Porosity)； q_w 與 q_h 分別為自溫泉地層中抽水時的水體積與熱能的影響量。因係考慮溫泉抽水，泉水中會含有熱能，故需同時考慮 q_w 與 q_h 的影響。

地層中孔隙水之流動需滿足 Darcy 定律，地層中之熱傳導現象需滿足 Fourier 定律，亦即：

$$n(v_w - v_s) = -\frac{k_r}{\gamma_w} \frac{\partial p}{\partial r} i_r - \frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial p}{\partial z} i_z, \quad (7a)$$

$$h_c = -\lambda_r \frac{\partial g}{\partial r} i_r - \lambda_z \frac{\partial g}{\partial z} i_z, \quad (7b)$$

式中 k_r 與 k_z 分別為地層水平暨垂直方向上之滲透係數 (Permeability); γ_w 為孔隙水之單位重 (Unit Weight); λ_r 及 λ_z 分別為地層在水平方向和垂直方向之熱傳導係數 (Thermal Conductivity)。

將方程式(7a)、(7b)分別代入式(6a)、(6b)，並考慮單位時間內有 Q_w 體積之溫泉水被抽出，其中包含 Q_h 焦耳的熱能。若抽水深度為 h ，並將抽水點之座標位置落在 $(0, h)$ 位置上，則可推得另兩個基本控制方程式如下：

$$\frac{k_r}{\gamma_w} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{Q_w}{2\pi r} \delta(r) \delta(z-h) = 0, \quad (8a)$$

$$\lambda_r \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \lambda_z \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} - \frac{Q_h}{2\pi r} \delta(r) \delta(z-h) = 0, \quad (8b)$$

式中 $\delta(x)$ 是 Dirac delta 函數。式(5a)、(5b)、(8a)與(8b)組成問題之基本方程式。

2.2 邊界條件與初始條件

茲模擬溫泉水層為一半無限域多孔介質，並考慮溫泉水層因抽水後之長期變化，所以數學模式中不會出現時間因素的影響。在 $z=0$ 之地表邊界位置上，係考慮地表邊界無正向應力及剪應力變化、無孔隙水壓變化(透水情況)且無溫度變化(恆溫狀態)等，因此在此邊界上之邊界條件可表為：

$$\sigma'_r(r,0) = 0, \quad \sigma'_{zz}(r,0) = 0, \quad p(r,0) = 0, \quad g(r,0) = 0. \quad (9)$$

在 $z \rightarrow \infty$ 之無限深遠處，其地層位移、超額孔隙水壓和地層溫度變化量等應不會受到點抽水的影響，所以無限深遠處之邊界條件可表為：

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \{u_r(r,z)\} \rightarrow 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \{u_z(r,z)\} \rightarrow 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \{p(r,z)\} \rightarrow 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \{g(r,z)\} \rightarrow 0. \quad (10)$$

本文係考慮問題之各項初始條件均為零。因係考慮溫泉水層抽水後之長期地層下陷情況，故數學模式中之各物理變化量均不會出現時間變數 t 。

三、溫泉水抽水引致之沉陷等閉合解

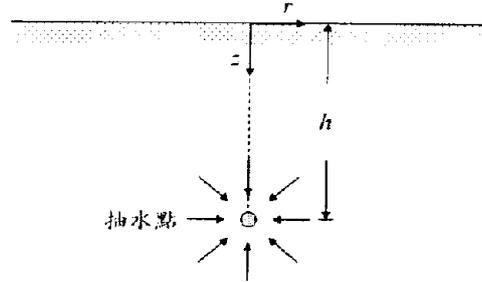


圖 1 半無限域點狀溫泉水抽水問題示意圖

本文係引用積分轉換方法解析如圖 1 所示點溫泉水抽水問題之數學模式，所採用的解析方法為 Hankel 積分轉換、Fourier 積分轉換與聯立微分方程式的標準解法，並引用數學使用手冊[22]，推導出半無限域溫泉水層受點抽水作用所引致的地表沉陷等之穩態閉合解，如以下所示：

$$\begin{aligned} u_r = & \frac{Q_h}{4\pi\lambda_z} \left(a_1^* \frac{r}{R_1^*} + a_2^* \frac{r}{R_2^*} + a_3^* \frac{r}{R_4^*} \right. \\ & + c_1 \frac{r}{R_1} + c_2 \frac{r}{R_2} + c_3 \frac{r}{R_3} + c_4 \frac{r}{R_4} \\ & \left. + c_5 \frac{r}{R_5} + c_6 \frac{r}{R_6} + c_7 \frac{r}{R_7} \right) \\ & + \frac{\gamma_w Q_w}{4\pi k_z} \left(\tilde{a}_1^* \frac{r}{R_1^*} + \tilde{a}_2^* \frac{r}{R_2^*} + \tilde{a}_3^* \frac{r}{R_3^*} \right. \\ & + \tilde{c}_1 \frac{r}{R_1} + \tilde{c}_2 \frac{r}{R_2} + \tilde{c}_3 \frac{r}{R_3} + \tilde{c}_4 \frac{r}{R_4} \\ & \left. + \tilde{c}_5 \frac{r}{R_5} + \tilde{c}_6 \frac{r}{R_6} + \tilde{c}_7 \frac{r}{R_7} \right), \quad (11a) \\ u_z = & \frac{Q_h}{4\pi\lambda_z} \left[b_1^* \sinh^{-1} \frac{\mu_1(z-h)}{r} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ b_2^* \sinh^{-1} \frac{\mu_2(z-h)}{r} + b_3^* \sinh^{-1} \frac{\mu_4(z-h)}{r} \\
 &+ S_1 c_1 \sinh^{-1} \frac{\mu_1(z+h)}{r} + S_1 c_2 \sinh^{-1} \frac{\mu_1 z + \mu_2 h}{r} \\
 &+ S_1 c_3 \sinh^{-1} \frac{\mu_1 z + \mu_4 h}{r} + S_2 c_4 \sinh^{-1} \frac{\mu_2 z + \mu_1 h}{r} \\
 &+ S_2 c_5 \sinh^{-1} \frac{\mu_2(z+h)}{r} + S_2 c_6 \sinh^{-1} \frac{\mu_2 z + \mu_4 h}{r} \\
 &+ S_3 c_7 \sinh^{-1} \frac{\mu_4(z+h)}{r} \Big] \\
 &+ \frac{\gamma_w Q_w}{4\pi k_z} \left[\tilde{b}_1^* \sinh^{-1} \frac{\mu_1(z-h)}{r} \right. \\
 &+ \tilde{b}_2^* \sinh^{-1} \frac{\mu_2(z-h)}{r} + \tilde{b}_3^* \sinh^{-1} \frac{\mu_4(z-h)}{r} \\
 &+ S_1 \tilde{c}_1 \sinh^{-1} \frac{\mu_1(z+h)}{r} + S_1 \tilde{c}_2 \sinh^{-1} \frac{\mu_1 z + \mu_2 h}{r} \\
 &+ S_1 \tilde{c}_3 \sinh^{-1} \frac{\mu_1 z + \mu_4 h}{r} + S_2 \tilde{c}_4 \sinh^{-1} \frac{\mu_2 z + \mu_1 h}{r} \\
 &+ S_2 \tilde{c}_5 \sinh^{-1} \frac{\mu_2(z+h)}{r} + S_2 \tilde{c}_6 \sinh^{-1} \frac{\mu_2 z + \mu_4 h}{r} \\
 &+ S_3 \tilde{c}_7 \sinh^{-1} \frac{\mu_4(z+h)}{r} \Big], \quad (11b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p = \frac{\gamma_w Q_w}{4\pi \mu_3 k_z} &\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + \mu_3^2(z+h)^2}} \right. \\
 &\left. - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \mu_3^2(z-h)^2}} \right], \quad (11c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q = \frac{Q_h}{4\pi \mu_4 \lambda_{tz}} &\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + \mu_4^2(z+h)^2}} \right. \\
 &\left. - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \mu_4^2(z-h)^2}} \right], \quad (11d)
 \end{aligned}$$

式中

$$R_i^* = \sqrt{r^2 + \mu_i^2(z-h)^2} + \mu_i |z-h|, \quad (i=1,2,3,4);$$

$$R_1 = \sqrt{r^2 + \mu_1^2(z+h)^2} + \mu_1(z+h);$$

$$R_2 = \sqrt{r^2 + (\mu_1 z + \mu_2 h)^2} + \mu_1 z + \mu_2 h;$$

$$R_3 = \sqrt{r^2 + (\mu_1 z + \mu_4 h)^2} + \mu_1 z + \mu_4 h;$$

$$\tilde{R}_3 = \sqrt{r^2 + (\mu_1 z + \mu_3 h)^2} + \mu_1 z + \mu_3 h;$$

$$R_4 = \sqrt{r^2 + (\mu_2 z + \mu_1 h)^2} + \mu_2 z + \mu_1 h;$$

$$R_5 = \sqrt{r^2 + \mu_2^2(z+h)^2} + \mu_2(z+h);$$

$$R_6 = \sqrt{r^2 + (\mu_2 z + \mu_4 h)^2} + \mu_2 z + \mu_4 h;$$

$$\tilde{R}_6 = \sqrt{r^2 + (\mu_2 z + \mu_3 h)^2} + \mu_2 z + \mu_3 h;$$

$$R_7 = \sqrt{r^2 + \mu_4^2(z+h)^2} + \mu_4(z+h);$$

$$\tilde{R}_7 = \sqrt{r^2 + \mu_3^2(z+h)^2} + \mu_3(z+h);$$

$$a_i = \frac{1}{\mu_i} \{ L\beta_r + [(F+L)\beta_z - C\beta_r] \mu_i^2 \}, \quad (i=1,2,4);$$

$$a_1^* = -\frac{[(F+L)\beta_z - C\beta_r] \mu_1^2 + L\beta_r}{CL\mu_1(\mu_1^2 - \mu_2^2)(\mu_1^2 - \mu_4^2)};$$

$$a_2^* = -\frac{[(F+L)\beta_z - C\beta_r] \mu_2^2 + L\beta_r}{CL\mu_2(\mu_2^2 - \mu_1^2)(\mu_2^2 - \mu_4^2)};$$

$$a_3^* = -\frac{[(F+L)\beta_z - C\beta_r] \mu_4^2 + L\beta_r}{CL\mu_4(\mu_4^2 - \mu_1^2)(\mu_4^2 - \mu_2^2)};$$

$$\tilde{a}_1^* = -\frac{(F+L-C)\mu_1^2 + L}{CL\mu_1(\mu_1^2 - \mu_2^2)(\mu_1^2 - \mu_3^2)};$$

$$\tilde{a}_2^* = -\frac{(F+L-C)\mu_2^2 + L}{CL\mu_2(\mu_2^2 - \mu_1^2)(\mu_2^2 - \mu_3^2)};$$

$$\tilde{a}_3^* = -\frac{(F+L-C)\mu_3^2 + L}{CL\mu_3(\mu_3^2 - \mu_1^2)(\mu_3^2 - \mu_2^2)};$$

$$b_i = L\beta_z \mu_i^2 + (F+L)\beta_r - A\beta_z, \quad (i=1,2,4);$$

$$b_1^* = -\frac{L\beta_z \mu_1^2 + (F+L)\beta_r - A\beta_z}{CL(\mu_1^2 - \mu_2^2)(\mu_1^2 - \mu_4^2)};$$

$$b_2^* = -\frac{L\beta_z \mu_2^2 + (F+L)\beta_r - A\beta_z}{CL(\mu_2^2 - \mu_1^2)(\mu_2^2 - \mu_4^2)};$$

$$b_3^* = -\frac{L\beta_z \mu_4^2 + (F+L)\beta_r - A\beta_z}{CL(\mu_4^2 - \mu_1^2)(\mu_4^2 - \mu_2^2)};$$

$$\tilde{b}_1^* = -\frac{L\mu_1^2 + F + L - A}{CL(\mu_1^2 - \mu_2^2)(\mu_1^2 - \mu_3^2)};$$

$$\tilde{b}_2^* = -\frac{L\mu_2^2 + F + L - A}{CL(\mu_2^2 - \mu_1^2)(\mu_2^2 - \mu_3^2)};$$

$$\tilde{b}_3^* = -\frac{L\mu_3^2 + F + L - A}{CL(\mu_3^2 - \mu_1^2)(\mu_3^2 - \mu_2^2)};$$

$$c_1 = -\frac{C\mu_1^2 - L}{CL^2(C\mu_1^2 + F)(\mu_2 - \mu_1)} \cdot \frac{\mu_2(Fa_1 + C\mu_1 b_1) - L(\mu_1 a_1 - b_1)}{(\mu_1^2 - \mu_2^2)(\mu_1^2 - \mu_4^2)} ;$$

$$c_2 = -\frac{C\mu_1^2 - L}{CL^2(C\mu_1^2 + F)(\mu_2 - \mu_1)} \cdot \frac{\mu_2(Fa_2 + C\mu_2 b_2) - L(\mu_2 a_2 - b_2)}{(\mu_2^2 - \mu_1^2)(\mu_2^2 - \mu_4^2)} ;$$

$$c_3 = -\frac{C\mu_1^2 - L}{L(C\mu_1^2 + F)(\mu_2 - \mu_1)S_4} \cdot \left[\frac{(C\mu_2\mu_3 + L)b_4 + La_3 S_3}{\mu_4 a_4} - 2L + C\mu_2 S_3 \right] ;$$

$$c_4 = -\frac{C\mu_2^2 - L}{CL^2(C\mu_2^2 + F)(\mu_2 - \mu_1)} \cdot \frac{-\mu_1(Fa_1 + C\mu_1 b_1) + L(\mu_1 a_1 - b_1)}{(\mu_1^2 - \mu_2^2)(\mu_1^2 - \mu_4^2)} ;$$

$$c_5 = -\frac{C\mu_2^2 - L}{CL^2(C\mu_2^2 + F)(\mu_2 - \mu_1)} \cdot \frac{-\mu_1(Fa_2 + C\mu_2 b_2) + L(\mu_2 a_2 - b_2)}{(\mu_2^2 - \mu_1^2)(\mu_2^2 - \mu_4^2)} ;$$

$$c_6 = -\frac{C\mu_2^2 - L}{L(C\mu_2^2 + F)(\mu_2 - \mu_1)S_4} \cdot \left[\frac{-(C\mu_1\mu_4 + L)b_4 - La_4 S_3}{\mu_4 a_4} + 2L - C\mu_1 S_3 \right] ;$$

$$c_7 = \frac{1}{\mu_4 S_4} ;$$

$$\tilde{c}_1 = \frac{\mu_2 + \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \frac{(F + L - C)\mu_1^2 + L}{CL\mu_1(\mu_1^2 - \mu_2^2)(\mu_1^2 - \mu_3^2)} ;$$

$$\tilde{c}_2 = \frac{2}{\mu_2 - \mu_1} \frac{(F + L - C)\mu_2^2 + L}{CL(\mu_2^2 - \mu_1^2)(\mu_2^2 - \mu_3^2)} \cdot \frac{(C\mu_2^2 + F)(C\mu_1^2 - L)}{(C\mu_2^2 - L)(C\mu_1^2 + F)} ;$$

$$\tilde{c}_3 = \frac{2}{\mu_2 - \mu_1} \frac{1}{\tilde{S}_4} \left(1 - \frac{\tilde{S}_3}{\mu_3} \right) \frac{C\mu_1^2 - L}{C\mu_1^2 + F} ;$$

$$\tilde{c}_4 = -\frac{2}{\mu_2 - \mu_1} \frac{(F + L - C)\mu_1^2 + L}{CL(\mu_1^2 - \mu_2^2)(\mu_1^2 - \mu_3^2)}$$

$$\cdot \frac{(C\mu_2^2 - L)(C\mu_1^2 + F)}{(C\mu_2^2 + F)(C\mu_1^2 - L)} ;$$

$$\tilde{c}_5 = -\frac{\mu_2 + \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \frac{(F + L - C)\mu_2^2 + L}{CL\mu_2(\mu_2^2 - \mu_1^2)(\mu_2^2 - \mu_3^2)} ;$$

$$\tilde{c}_6 = -\frac{2}{\mu_2 - \mu_1} \frac{1}{\tilde{S}_4} \left(1 - \frac{\tilde{S}_3}{\mu_3} \right) \frac{C\mu_2^2 - L}{C\mu_2^2 + F} ;$$

$$\tilde{c}_7 = \frac{1}{\mu_3 \tilde{S}_4} ;$$

$$S_i = \frac{-A + \mu_i^2 L}{\mu_i(F + L)}, (i = 1, 2) ;$$

$$S_3 = \frac{\mu_4 [L\beta_z \mu_4^2 + (F + L)\beta_r - A\beta_z]}{[(F + L)\beta_z - C\beta_r] \mu_4^2 + L\beta_r} ;$$

$$S_4 = \frac{CL\mu_4^4 - [AC - F(F + 2L)]\mu_4^2 + AL}{[(F + L)\beta_z - C\beta_r] \mu_4^2 + L\beta_r} ;$$

$$\tilde{S}_3 = \frac{L\mu_3^2 + F + L - A}{(F + L - C)\mu_3^2 + L} ;$$

$$\tilde{S}_4 = \frac{CL\mu_3^4 - [AC - F(F + 2L)]\mu_3^2 + AL}{(F + L - C)\mu_3^2 + L} ;$$

特徵根 μ_1 與 μ_2 需滿足如下之特徵方程式：
 $CL\mu^4 - [AC - F(F + 2L)]\mu^2 + AL = 0$ (12)
 而 $\mu_3 = \sqrt{k_r/k_z}$ 、 $\mu_4 = \sqrt{\lambda_r/\lambda_z}$ 。

若進一步考慮溫泉地層之力學性質、熱流性質與滲流性質等均為等向性，則式(11a)-(11d)可化簡為：

$$u_r(r, z) = \frac{(1 - 2\nu)\gamma_w Q_w}{16\pi(1 - \nu)Gk} \left[-\frac{r}{R_{(1)}} + \frac{r}{R_{(2)}} \right. \\ \left. - (3 - 4\nu) \frac{rh}{R_{(2)}R_{(2)}^*} + \frac{rz}{R_{(2)}R_{(2)}^*} + \frac{2hrz}{R_{(2)}^3} \right] \\ + \frac{(1 + \nu)\alpha_s Q_h}{8\pi(1 - \nu)\lambda_r} \left[-\frac{r}{R_{(1)}} + \frac{r}{R_{(2)}^*} \right. \\ \left. - (3 - 4\nu) \frac{rh}{R_{(2)}R_{(2)}^*} + \frac{rz}{R_{(2)}R_{(2)}^*} + \frac{2hrz}{R_{(2)}^3} \right], (13a)$$

$$u_z(r, z) = \frac{(1 - 2\nu)\gamma_w Q_w}{16\pi(1 - \nu)Gk} \left[-\frac{z - h}{R_{(1)}} \right. \\ \left. + (3 - 4\nu) \frac{h}{R_{(2)}} + \frac{z}{R_{(2)}} + \frac{2hz(z + h)}{R_{(2)}^3} \right]$$

$$+ \frac{(1+\nu)\alpha_s Q_h}{8\pi(1-\nu)\lambda_s} \left[-\frac{z-h}{R_{(1)}} + (3-4\nu) \frac{h}{R_{(2)}} + \frac{z}{R_{(2)}} + \frac{2hz(z+h)}{R_{(2)}^3} \right], \quad (13b)$$

$$p(r, z) = \frac{\gamma_w Q_w}{4\pi k} \left[\frac{1}{R_{(2)}} - \frac{1}{R_{(1)}} \right], \quad (13c)$$

$$g(r, z) = \frac{Q_h}{4\pi\lambda_s} \left[\frac{1}{R_{(2)}} - \frac{1}{R_{(1)}} \right], \quad (13d)$$

其中符號 $R_{(1)}$ 、 $R_{(2)}$ 、 $R_{(2)}^*$ 分別定義為
 $R_{(1)} = \sqrt{r^2 + (z-h)^2}$ 、 $R_{(2)} = \sqrt{r^2 + (z+h)^2}$ 、
 $R_{(2)}^* = \sqrt{r^2 + (z+h)^2} + z+h$ 。

若欲瞭解溫泉抽水所引致的地表面之水平位移量暨垂直位移量，則需先將代表地表面位置之座標變數值 $z=0$ 代入式(11a)-(11b)、或式(13a)-(13b)，再將各項地層參數與溫泉抽水量 Q_w 暨其中之熱能含量 Q_h 代入，即可得出長期溫泉抽水所引起之地表面水平暨垂直位移量。

四、結語

本文旨在探討橫向等向性多孔隙飽和溫泉地層因單點抽水所引致的地層水平位移、垂直位移、超額孔隙水壓與地層溫度變化量等，如式(11a)-(11d)所示。此外，本文亦研討出溫泉抽水所引致之等向性地層之地層水平位移、垂直位移、超額孔隙水壓與地層溫度變化量等，如式(13a)-(13d)所示。研討過程乃根據 Biot 的多孔介質壓密沉陷理論建立基本方程式，再以 Hankel 積分轉換方法等推求問題之解，所研討出之解為穩態閉合解。

為驗證各項研究成果之正確性，作者曾將所推導出之結果，以數值方法繪製數值結果，依圖形變化趨勢判斷其正確性，並將所研討出之閉合解，代回組成律、變位諧和條件、及力平衡方程式等基本方程式中，以確保所研討出之結果正確無誤。本文之研究成果，可據以計算出溫泉抽水所引起之地表沉陷量，亦可作為研討非點狀溫泉抽水等相關問題之基礎。

誌謝

本文係在 NSC-93-2625-Z-216-001 國科會計畫補助下所完成，特此申謝。

參考文獻

1. Terzaghi, K., *Theoretical Soil Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, (1943).
2. Biot, M.A., "General theory of three-dimensional consolidation," *J. Appl. Phys.*, Vol. 12, pp. 155-164 (1941).
3. Biot, M.A., "Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid," *J. Appl. Phys.*, Vol. 26, pp. 182-185 (1955).
4. Bear, J. and Corapcioglu, M.Y., "Mathematical model for regional land subsidence due to pumping, 2, Integrated aquifer subsidence equations for vertical and horizontal displacements," *Water Resources Res.*, Vol. 17, pp. 947-958 (1981).
5. Corapcioglu, M.Y. and Bear, J., "A mathematical model for regional land subsidence due to pumping, 3, Integrated equations for a phreatic aquifer," *Water Resources Res.*, Vol. 19, pp. 895-908 (1983).
6. Safai, N.M. and Pinder, G.F., "Vertical and horizontal land deformation in a desaturating porous medium," *Advanced Water Res.*, Vol. 2, No. 1, pp. 19-25 (1979).
7. Safai, N.M. and Pinder, G.F., "Vertical and horizontal land deformation due to fluid withdrawal," *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 4, pp. 131-142 (1980).
8. Lewis, R.W. and Schrefler, B.A., "A fully coupled consolidation model of the subsidence of Venice," *Water Resources Res.*, Vol. 14, No. 2, pp. 223-230 (1978).
9. Lewis, R.W. and Schrefler, B.A., "A finite element analysis of surface subsidence," in S.K. Saxena(ed.), *Evaluation and Prediction of Subsidence*, ASCE, New York, pp. 400-416 (1978).
10. Yeh, H.-D., Lu, R.-H. and Yeh, G.-T.,

- "Finite element modelling for land displacements due to pumping," *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 20, pp. 79-99 (1996).
11. Booker, J.R. and Carter, J.P., "Long term subsidence due to fluid extraction from a saturated, anisotropic, elastic soil mass," *Q. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 39, No. 1, pp. 85-97 (1986).
 12. Booker, J.R. and Carter, J.P., "Analysis of a point sink embedded in a porous elastic half space," *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 10, No. 2, pp. 137-150 (1986).
 13. Tarn, J.Q. and Lu, C.C., "Analysis of subsidence due to a point sink in an anisotropic porous elastic half space," *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 15, No. 8, pp. 573-592 (1991).
 14. Schiffman, R.L., "A thermoelastic theory of consolidation," *Environmental and Geophysical Heat Transfer*, C.J. Cremers, et al.,(eds.), ASME, Vol.4, New York, pp.78-84 (1971).
 15. Booker, J.R. and Savvidou, C., "Consolidation around a spherical heat source," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 20, pp. 1079-1090 (1984).
 16. Booker, J.R. and Savvidou, C., "Consolidation around a point heat source," *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 9, pp. 173-184 (1985).
 17. Savvidou, C. and Booker, J.R., "Consolidation around a heat source buried deep in a porous thermoelastic medium with anisotropic flow properties," *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 13, No. 1, pp. 75-90 (1989).
 18. Amadei, B., Savage, W.Z. and Swolfs, H.S., "Gravitational stresses in anisotropic rock masses," *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech.*, Vol. 24, pp. 293-312 (1987).
 19. Aversa, S. and Evangelista, A., "Thermal expansion of Neapolitan Yellow Tuff," *Rock Mech. Rock Engng.*, Vol. 26, pp. 281-306 (1993).
 20. Al-Nimr, M. and Naji, M., "The hyperbolic heat conduction equation in an anisotropic material," *Heat and Mass Transfer*, Vol. 35, pp. 493-497 (1999).
 21. Lu, J. C.-C., Chiu, W.-C. and Lin, F.-T., "Analysis of a buried deep point/line heat source in a cross-anisotropic porous elastic medium," *Proceedings of the 8th Conference of Advanced Technology Council in Mathematics*, pp. 162-171 (2003).
 22. Abramowitz, M. and Stegun, I.A., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, Inc., New York, (1970).

Theoretical Analysis of the Land Subsidence of Cross-Anisotropic Stratum Due to Hot Spring Pumping

John C.-C. Lu

*Department of Civil Engineering,
Chung-Hua University*

ABSTRACT

Based on Biot's three-dimensional consolidation theory of porous media, the long-term subsidence of a saturated elastic half-space containing a point sink due to hot spring fluid withdrawal is studied. As pumping of hot spring from an aquifer takes place, the pore water pressure is reduced in the withdrawal region. This leads to an increase in the effective stress between the solid particles and subsidence of ground surface. The stratum is modeled as cross-anisotropic porous media to simulate the stratified earth medium. Steady state closed-form solutions of the consolidation deformations are obtained by using the appropriate integral transform techniques. Results can provide a better understanding of the influence of hot spring pumping on the subsidence.

Keywords: hot spring pumping, land subsidence, closed-form solution, cross-anisotropic stratum

以下論文已發表，論文基本資料如下：

呂志宗、林鳳彩，2004/12/3-4，「單點抽水引致的地表水平暨垂直位移之暫態閉合解」，中華民國第二十八屆全國力學會議論文集，第 971-978 頁。(本文係在國科會研究計畫 NSC93-2625-Z-216-001 補助下所完成。)

單點抽水引致的地表水平暨垂直位移之暫態閉合解

呂志宗* 林鳳彩**

* 中華大學土木工程學系

** 國立高雄海洋科技大學造船工程系

摘要

本文基於 Biot 所建立之三維壓密理論，考慮地層為完全飽和之多孔介質，且地下水補注充分，其中之孔隙水與固體介質均考慮為可壓縮。抽水時，由於滲流影響，形成負的超額孔隙水壓力，因而地層中作用於孔隙水之應力逐漸轉移至土壤固體顆粒上，作用於固體土粒之有效應力增加，形成壓密沉陷。本文係引用 Laplace、Hankel 與 Fourier 積分轉換方法，分別研討出以穩定速率作點抽水所引起的地表壓密沉陷之暫態閉合解，用以討論地表沉陷量等，研究成果有助於了解抽水對地層下陷所造成的影響。

關鍵詞：半無限域、多孔介質、點抽水、暫態壓密沉陷

一、前言

抽水引致之地層下陷至今仍廣受重視，但與時間有關之非單向度暫態(Transient)沉陷問題之閉合解(Closed-Form Solution)，則甚罕見。當地下水自含水層中被抽出時，土壤中作用於孔隙水之壓應力會逐漸轉移至土壤顆粒上，土壤形成壓密現象，而導致地層下陷。

Terzaghi[1]首先引用有效應力觀念(Effective Stress Concept)說明土壤的單向度壓密過程，其理論模式中，係先計算出孔隙水壓力，再推導出地層之壓密沉陷量，故稱之為非耦合(Uncoupled)壓密模式。然而 Biot[2、3]所提出的三維壓密理論，係考慮孔隙水的平衡過程與土壤固體直接相關，所得出之結果亦被證實較為合理可靠。本文係引

用 Terzaghi[1]的非耦合壓密觀念、以及 Biot[2、3]的三維壓密思維，建立問題之基本方程式。

基於 Biot[2、3]的三維壓密理論模式，Bear 與 Corapcioglu[4、5]以地下水流動觀點，分別研討並解析受限含水層(Confined Aquifer)與非受限含水層(Unconfined Aquifer)中因大區域抽水所引致之壓密沉陷問題；Safai 與 Pinder[6、7]曾以有限元素法解析不飽和土層中之抽水所引致的壓密沉陷；Lewis 與 Schrefler[8、9]則應用有限元素法作義大利威尼斯城的個案研究；Yeh 等人[10]亦曾以有限元素法研討地層下陷問題。Booker 與 Carter[11、12]、Tarn 與 Lu[13]亦曾研討出汲水引致的地層壓密問題之閉合解，並探討地表邊界條件與地層異向性對地層壓密沉陷的影響。在 Tarn 與 Lu[13]的研究中，是以抽水點模擬抽水現象。本文係根據 Tarn 與 Lu[13]的研究成果，所進行之後續相關研究。所研討出之解，為單點抽水所引致壓密沉陷之暫態(Transient)閉合解，理論模式中，孔隙水與固體介質均考慮為可壓縮。

本文將地表面模擬一半無限域(Half-Space)，而地層力學性質與土壤之滲流性質皆考慮為均向性(Isotropic)。地表邊界是模擬為完全透水情況，以在地表下深度 h 位置，有一點抽水源模擬單井抽水的現象。仍考慮土層由飽和含水土壤構成，地下水補注充分，且其中之孔隙水與固體介質均考慮為可壓縮。所得出之結果，可對抽水所引致之與時間有關的地表沉陷問題有更深入的瞭解。

二、點抽水問題之數學模式

2.1 多孔介質彈性力學理論

2.1.1 介質位移與孔隙流體壓力方程式

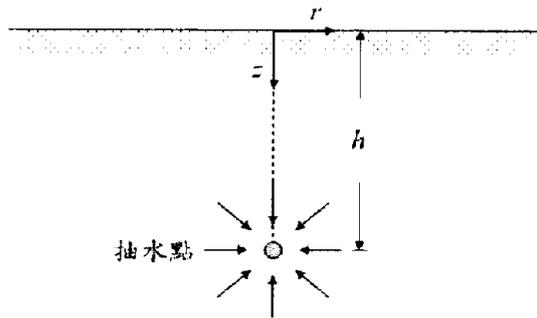


圖 1 半無限域中之點抽水問題示意圖

本文係引用多孔介質彈性力學理論建立基本方程式，探討如圖 1 所示半無限域多孔隙地層受點抽水作用問題之數學模式及其暫態基本解。多孔隙地層在受外力作用或流體流動時，都會造成多孔隙地層本身物理量的改變，例如其體積、應力、超額孔隙水壓等均會產生變化。茲以微小之代表性元素體分析多孔隙地層之力平衡以及質量守恆等方程式。若讓座標 z 軸通過點抽水源，則問題可考慮為軸對稱。多孔隙地層之應變 ε_{ij} ($i, j = r, \theta, z$) 與位移 (u_r, u_θ, u_z) 的線性關係式，可以軸對稱圓柱座標 (r, z) 表為：

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (1)$$

因問題為軸對稱，故環向位移 $u_\theta = 0$ 。令作用於多孔隙地層之總應力 (Total Stress) 為 τ_{ij} (張力為正)、有效應力 (Effective Stress) 為 σ'_{ij} (張力為正)、超額孔隙水壓力為 p (壓力為正)，並考慮孔隙水與固體介質均為可壓縮，再根據 Terzaghi[1] 的有效應力觀念 $\tau_{ij} = \sigma'_{ij} - p\delta_{ij}$ (δ_{ij} 為 Kronecker delta)，則地層之組成律 (Constitutive Law) 關係式可表為：

$$\tau_{rr} = \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}\varepsilon_{rr} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz})$$

$$-\frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+\nu_u)}p, \quad (2a)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz})$$

$$-\frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+\nu_u)}p, \quad (2b)$$

$$\tau_{zz} = \frac{2G\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) + \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}\varepsilon_{zz}$$

$$-\frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+\nu_u)}p, \quad (2c)$$

$$\tau_{rz} = 2G\varepsilon_{rz}, \quad (2d)$$

其中 G 為多孔隙飽和地層之剪力模數 (Shear Modulus), $G = E/2(1+\nu)$, E 是多孔隙飽和地層之楊氏係數 (Young's Modulus); ν 係多孔隙飽和地層之波松比 (Poisson's Ratio); B 是 Skempton[14] 所定義之孔隙水壓力參數; ν_u 是不排水情況下所測得之波松比。若孔隙水與固體介質均考慮為不可壓縮，則 $B=1$ 、 $\nu_u=1/2$ 。本文所建立之理論模式，有助於探討孔隙水與固體介質均為可壓縮情況下，因抽水所引致之暫態壓密沉陷問題。

作用於多孔隙飽和地層之總應力需滿足力平衡方程式 $\tau_{ij,j} + f_i = 0$ ，亦即：

$$\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + f_r = 0, \quad (3a)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + f_z = 0. \quad (3b)$$

若不考慮微體力 (Body Force) f_i ($i = r, z$) 的影響，並考慮 Terzaghi[1] 的有效應力觀念，先將式 (1) 代入式 (2a)-(2d)，再將式 (2a)-(2d) 代入力平衡方程式 (3a)、(3b) 中，則軸對稱多孔介質彈性力學問題之基本方程式可以多孔隙地層之位移量 u_i 和超額孔隙水壓 p 等表為：

$$G\nabla^2 u_r + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} - G \frac{u_r}{r^2}$$

$$-\frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+\nu_u)} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (4a)$$

$$G\nabla^2 u_z + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}$$

$$-\frac{3(v_u - v)}{B(1-2\nu)(1+v_u)} \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (4b)$$

其中 $\nabla^2 = \partial^2/\partial r^2 + 1/r \partial/\partial r + \partial^2/\partial z^2$; $\varepsilon = \partial u_r/\partial r + u_r/r + \partial u_z/\partial z$ 為多孔隙飽和地層之體積應變量。

2.1.2 流量連續方程式

本文將多孔隙飽和地層模擬為等向性之線彈性多孔介質，其中孔隙水的流動等需遵守質量守恆定律，如以下所示：

$$\nabla \cdot [n(v_w - v_s)] + \frac{3(v_u - v)}{B(1-2\nu)(1+v_u)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{9(v_u - v)(1-2\nu_u)}{2GB^2(1-2\nu)(1+v_u)} \frac{\partial p}{\partial t} + q_w = 0, \quad (5)$$

其中 v_s 與 v_w 分別為固體介質與孔隙流體之位移速度； n 是多孔介質的孔隙率 (Porosity)； q_w 是作用於多孔隙地層內部的抽水強度。若考慮壓密沉陷問題為非耦合理論模式情況，則式(5)中與地層之體積應變量 ε 相關之項次可忽略不計。基於此，式(5)應改寫為：

$$\nabla \cdot [n(v_w - v_s)] + \frac{9(v_u - v)(1-2\nu_u)}{2GB^2(1-2\nu)(1+v_u)} \frac{\partial p}{\partial t} + q_w = 0. \quad (5')$$

為簡化問題，本文擬考慮式(5')，僅探討非耦合壓密沉陷問題之解。

多孔隙地層中之孔隙水的流動需滿足 Darcy 定律，亦即：

$$n(v_w - v_s) = -\frac{k}{\gamma_w} \left(\frac{\partial p}{\partial r} i_r + \frac{\partial p}{\partial z} i_z \right), \quad (6)$$

式中 k 為多孔隙地層之滲透係數； γ_w 是孔隙水之單位重 (Unit Weight)。

將方程式(6)代入方程式(5')，並考慮有一個強度為 Q (m^3/s) 之點抽水源作用在座標 $(0, h)$ 上，則可推得另一個基本控制方程式如下：

$$-\frac{k}{\gamma_w} \nabla^2 p + \frac{9(v_u - v)(1-2\nu_u)}{2GB^2(1-2\nu)(1+v_u)} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Q}{2\pi r} \delta(r) \delta(z-h) u(t) = 0, \quad (7)$$

式中 $\delta(x)$ 是 Dirac delta 函數； $u(t)$ 是單位階梯函數 (Heaviside Unit Step Function)。式(4a)、式(4b)與式(7)組成軸對稱非耦合壓密沉陷問題之基本控制方程式，其中所引用之基本地層參數為剪力模數 G 、波松比 ν 、Skempton 孔隙水壓參數 B 及不排水情況下所測得之波松比 ν_u ，模式中之固體介質與孔隙水均考慮為可壓縮。

2.2 邊界條件與初始條件

茲考慮在 $z=0$ 之地表邊界位置上無正向應力及剪應力變化且無孔隙水壓變化 (透水情況)，因此在此邊界上之邊界條件可表為：

$$\sigma'_{rz}(r, 0, t) = 0, \sigma'_{zz}(r, 0, t) = 0, p(r, 0, t) = 0. \quad (8)$$

在 $z \rightarrow \infty$ 之無限深遠處，其多孔介質位移和超額孔隙水壓等應不會受點抽水的影響。所以無限深遠處之邊界條件可表為：

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \{u_r(r, z, t), u_z(r, z, t), p(r, z, t)\} \rightarrow \{0, 0, 0\}. \quad (9)$$

問題之初始條件是考慮為各種物理變化量在 $t=0$ 時，其值均為零，亦即：

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \{u_r(r, z, t), u_z(r, z, t), p(r, z, t)\} \rightarrow \{0, 0, 0\}. \quad (10)$$

本文將引用 Laplace、Hankel 與 Fourier 積分轉換方法 (Integral Transform) 解析所建立之數學模式，所研討出之解為與時間有關之暫態基本解。

三、無因次化數學模式

茲令土壤的臨界破壞剪應力 σ_0 為特徵應力 (Characteristic Stress)，並令抽水深度 h 為特徵長度 (Characteristic Length)，而特徵位移量 (Characteristic Displacement) u_0 為 $u_0 = \sigma_0 h / G$ ， $t_0 = \gamma_w h^2 / k \sigma_0$ 為特徵時間 (Characteristic Time)。然後，再將座標變數 (r, z) 、時間變數 t 、地層位移 (u_r, u_z) 、超額孔隙水壓力 p 等予以無因次化，如以下所示：

$$\hat{r} = \frac{r}{h}, \quad \hat{z} = \frac{z}{h}, \quad \hat{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \hat{u}_r = \frac{u_r}{u_0}, \quad \hat{u}_z = \frac{u_z}{u_0},$$

$$\hat{p} = \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+\nu_u)} \frac{p}{\sigma_0}. \quad (11)$$

基於此，基本方程式(4a)、(4b)與(7)可改寫為：

$$\hat{\nabla}^2 \hat{u}_r + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \hat{r}} - \frac{\hat{u}_r}{\hat{r}^2} - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{r}} = 0, \quad (12a)$$

$$\hat{\nabla}^2 \hat{u}_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \hat{z}} - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} = 0, \quad (12b)$$

$$-\hat{\nabla}^2 \hat{p} + \frac{9(\nu_u - \nu)(1-2\nu_u)}{2GB^2(1-2\nu)(1+\nu_u)} \sigma_0 \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{t}} + \frac{Qt_0}{2\pi h \hat{r}} \frac{B(1-2\nu)(1+\nu_u)}{3(\nu_u - \nu)} \delta(h\hat{r})\delta(h(\hat{z}-1)) \cdot u(t_0 \hat{t}) = 0, \quad (12c)$$

其中 $\hat{\nabla}^2 = \partial^2/\partial \hat{r}^2 + 1/\hat{r} \partial/\partial \hat{r} + \partial^2/\partial \hat{z}^2$ ；符號 $\hat{\varepsilon} = \partial \hat{u}_r/\partial \hat{r} + \hat{u}_r/\hat{r} + \partial \hat{u}_z/\partial \hat{z}$ 。

數學模式中之邊界條件與初始條件亦應同時作無因次化轉換，因此，式(8)與式(9)所示之邊界條件應改寫為：

$$\hat{\sigma}'_{rz}(\hat{r}, 0, \hat{t}) = 0, \quad \hat{\sigma}'_{zz}(\hat{r}, 0, \hat{t}) = 0, \quad \hat{p}(\hat{r}, 0, \hat{t}) = 0, \quad (13a)$$

$$\lim_{\hat{z} \rightarrow 0} \{ \hat{u}_r(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}), \hat{u}_z(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}), \hat{p}(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}) \} \rightarrow \{ 0, 0, 0 \}, \quad (13b)$$

其中 $\hat{\sigma}'_{rz} = \sigma'_{rz}/\sigma_0$ 、 $\hat{\sigma}'_{zz} = \sigma'_{zz}/\sigma_0$ 。

另外，問題之初始條件亦應調整為：

$$\lim_{\hat{t} \rightarrow 0} \{ \hat{u}_r(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}), \hat{u}_z(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}), \hat{p}(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}) \} \rightarrow \{ 0, 0, 0 \}. \quad (14)$$

式(12a)-(12c)、(13a)、(13b)與(14)即為無因次化後，單點抽水問題之數學模式，其中之孔隙水與固體介質均考慮為可壓縮。

四、積分轉換解析

本文係引用積分變換方法解析如圖1所示點抽水問題之數學模式，所採用的方法為分別對變數 \hat{t} 、 \hat{r} 和 \hat{z} 作 Laplace 積分轉換、Hankel 積分轉換和 Fourier 積分轉換，推導出半無限域多孔隙地層受點抽水影響之地層位移等之暫態基本解。首先引用式(14)所示之初始條件，對式(12a)、式(12b)與式(12c)

中之變數 \hat{t} 進行 Laplace 積分轉換。基於此，可得：

$$\left[2\eta \left(\frac{\partial^2}{\partial \hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} - \frac{1}{\hat{r}^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \hat{z}^2} \right] U_r + (2\eta - 1) \frac{\partial^2 U_z}{\partial \hat{r} \partial \hat{z}} - \frac{\partial P}{\partial \hat{r}} = 0, \quad (15a)$$

$$(2\eta - 1) \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{\hat{r}} \right) U_r + \left(\frac{\partial^2}{\partial \hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} + 2\eta \frac{\partial^2}{\partial \hat{z}^2} \right) U_z - \frac{\partial P}{\partial \hat{z}} = 0, \quad (15b)$$

$$\left[- \left(\frac{\partial^2}{\partial \hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} + \frac{\partial^2}{\partial \hat{z}^2} \right) + \beta \sigma_0 s \right] P = - \frac{Qt_0 \alpha}{2\pi h \hat{r} s} \delta(h\hat{r})\delta(h(\hat{z}-1)), \quad (15c)$$

式中 $\eta = \frac{1-\nu}{1-2\nu}$ ； $\alpha = \frac{B(1-2\nu)(1+\nu_u)}{3(\nu_u - \nu)}$ ；

$\beta = \frac{9(\nu_u - \nu)(1-2\nu_u)}{2GB^2(1-2\nu)(1+\nu_u)}$ 。式(13a)與式(13b)

所示之邊界條件亦需作 Laplace 積分轉換，其結果如以下所示：

$$\Sigma'_{rz}(\hat{r}, 0; s) = 0, \quad \Sigma'_{zz}(\hat{r}, 0; s) = 0, \quad P(\hat{r}, 0; s) = 0, \quad (16a)$$

$$\lim_{\hat{z} \rightarrow 0} \{ U_r(\hat{r}, \hat{z}; s), U_z(\hat{r}, \hat{z}; s), P(\hat{r}, \hat{z}; s) \} \rightarrow \{ 0, 0, 0 \}, \quad (16b)$$

式(15a)-(15c)與式(16a)、(16b)中之 $\{ U_r, U_z, P, \Sigma'_{rz}, \Sigma'_{zz} \}$ 是 $\{ \hat{u}_r, \hat{u}_z, \hat{p}, \hat{\sigma}'_{rz}, \hat{\sigma}'_{zz} \}$ 的 Laplace 積分轉換：

$$\begin{Bmatrix} U_r(\hat{r}, \hat{z}; s) \\ U_z(\hat{r}, \hat{z}; s) \\ P(\hat{r}, \hat{z}; s) \\ \Sigma'_{rz}(\hat{r}, \hat{z}; s) \\ \Sigma'_{zz}(\hat{r}, \hat{z}; s) \end{Bmatrix} = \int_0^\infty \begin{Bmatrix} \hat{u}_r(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}) \\ \hat{u}_z(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}) \\ \hat{p}(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}) \\ \hat{\sigma}'_{rz}(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}) \\ \hat{\sigma}'_{zz}(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}) \end{Bmatrix} \exp(-s\hat{t}) d\hat{t}, \quad (17)$$

上式之 Laplace 積分反轉換係定義為：

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}_r(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}) \\ \hat{u}_z(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}) \\ \hat{p}(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}) \\ \hat{\sigma}'_{rz}(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}) \\ \hat{\sigma}'_{zz}(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \begin{Bmatrix} U_r(\hat{r}, \hat{z}; s) \\ U_z(\hat{r}, \hat{z}; s) \\ P(\hat{r}, \hat{z}; s) \\ \Sigma'_{rz}(\hat{r}, \hat{z}; s) \\ \Sigma'_{zz}(\hat{r}, \hat{z}; s) \end{Bmatrix} \exp(s\hat{t}) ds. \quad (18)$$

再繼續分別對式(15a)-(15c)其中之變數 \hat{r} 進行 1 階、0 階與 0 階之 Hankel 積分轉換，可得：

$$\left(\frac{d^2}{d\hat{z}^2} - 2\eta\xi^2\right)\tilde{U}_r - (2\eta - 1)\xi \frac{d\tilde{U}_z}{d\hat{z}} + \xi\tilde{P} = 0, \quad (19a)$$

$$(2\eta - 1)\xi \frac{\partial\tilde{U}_r}{\partial\hat{z}} + \left(2\eta\frac{d^2}{d\hat{z}^2} - \xi^2\right)\tilde{U}_z - \frac{d\tilde{P}}{d\hat{z}} = 0, \quad (19b)$$

$$\left[-\left(\frac{d^2}{d\hat{z}^2} - \xi^2\right) + \beta\sigma_0 s\right]\tilde{P} = -\frac{Qt_0\alpha}{2\pi h^2 s} \delta(h(\hat{z} - 1)), \quad (19c)$$

式(16a)與式(16b)所示問題之邊界條件中的六個項次，亦需分別進行 1 階、0 階、0 階、1 階、0 階、0 階之 Hankel 積分轉換：

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}'_{rz}(0; \xi, s) = 0, \quad \tilde{\Sigma}'_{zz}(0; \xi, s) = 0, \\ \tilde{P}(0; \xi, s) = 0, \end{aligned} \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\hat{z} \rightarrow \infty} \tilde{U}_r(\hat{z}; \xi, s) \rightarrow 0, \quad \lim_{\hat{z} \rightarrow \infty} \tilde{U}_z(\hat{z}; \xi, s) \rightarrow 0, \\ \lim_{\hat{z} \rightarrow \infty} \tilde{P}(\hat{z}; \xi, s) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (20b)$$

式(19a)-(19c)暨式(20a)、(20b)中之 $\{\tilde{U}_r, \tilde{U}_z, \tilde{P}, \tilde{\Sigma}'_{rz}, \tilde{\Sigma}'_{zz}\}$ 係定義為：

$$\begin{Bmatrix} \tilde{U}_r(\hat{z}; \xi, s) \\ \tilde{U}_z(\hat{z}; \xi, s) \\ \tilde{P}(\hat{z}; \xi, s) \\ \tilde{\Sigma}'_{rz}(\hat{z}; \xi, s) \\ \tilde{\Sigma}'_{zz}(\hat{z}; \xi, s) \end{Bmatrix} = \int_0^\infty \hat{r} \begin{Bmatrix} U_r(\hat{r}, \hat{z}; s) J_1(\xi \hat{r}) \\ U_z(\hat{r}, \hat{z}; s) J_0(\xi \hat{r}) \\ P(\hat{r}, \hat{z}; s) J_0(\xi \hat{r}) \\ \Sigma'_{rz}(\hat{r}, \hat{z}; s) J_1(\xi \hat{r}) \\ \Sigma'_{zz}(\hat{r}, \hat{z}; s) J_0(\xi \hat{r}) \end{Bmatrix} d\hat{r}, \quad (21)$$

其反轉換則定義為：

$$\begin{Bmatrix} U_r(\hat{r}, \hat{z}; s) \\ U_z(\hat{r}, \hat{z}; s) \\ P(\hat{r}, \hat{z}; s) \\ \Sigma'_{rz}(\hat{r}, \hat{z}; s) \\ \Sigma'_{zz}(\hat{r}, \hat{z}; s) \end{Bmatrix} = \int_0^\infty \xi \begin{Bmatrix} \tilde{U}_r(\hat{z}; \xi, s) J_1(\xi \hat{r}) \\ \tilde{U}_z(\hat{z}; \xi, s) J_0(\xi \hat{r}) \\ \tilde{P}(\hat{z}; \xi, s) J_0(\xi \hat{r}) \\ \tilde{\Sigma}'_{rz}(\hat{z}; \xi, s) J_1(\xi \hat{r}) \\ \tilde{\Sigma}'_{zz}(\hat{z}; \xi, s) J_0(\xi \hat{r}) \end{Bmatrix} d\xi. \quad (22)$$

式(19a)-(19c)係聯立常微分方程，其通解(General Solution) $\{\tilde{U}_r, \tilde{U}_z, \tilde{P}\}$ 是由齊性解(Homogeneous Solution) $\{\tilde{U}_{rh}, \tilde{U}_{zh}, \tilde{P}_h\}$ 與滿足非齊性項(Non-homogeneous Term)

$-\frac{Qt_0\alpha}{2\pi h^2 s} \delta(h(\hat{z} - 1))$ 之非齊性解

(Non-homogeneous Solution) $\{\tilde{U}_{rp}, \tilde{U}_{zp}, \tilde{P}_p\}$

的和所組成。解析式(19a)-(19c)之齊性微分方程式部分，即可推導出問題之齊性解如下所示：

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{rh} = A_1 e^{\xi\hat{z}} + A_2 \hat{z} e^{\xi\hat{z}} + A_3 e^{-\xi\hat{z}} + A_4 \hat{z} e^{-\xi\hat{z}} \\ + A_5 e^{\sqrt{\xi^2 + \beta\sigma_0 s} \hat{z}} + A_6 e^{-\sqrt{\xi^2 + \beta\sigma_0 s} \hat{z}}, \end{aligned} \quad (23a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{zh} = B_1 e^{\xi\hat{z}} + B_2 \hat{z} e^{\xi\hat{z}} + B_3 e^{-\xi\hat{z}} + B_4 \hat{z} e^{-\xi\hat{z}} \\ + B_5 e^{\sqrt{\xi^2 + \beta\sigma_0 s} \hat{z}} + B_6 e^{-\sqrt{\xi^2 + \beta\sigma_0 s} \hat{z}}, \end{aligned} \quad (23b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_h = C_1 e^{\xi\hat{z}} + C_2 \hat{z} e^{\xi\hat{z}} + C_3 e^{-\xi\hat{z}} + C_4 \hat{z} e^{-\xi\hat{z}} \\ + C_5 e^{\sqrt{\xi^2 + \beta\sigma_0 s} \hat{z}} + C_6 e^{-\sqrt{\xi^2 + \beta\sigma_0 s} \hat{z}}, \end{aligned} \quad (23c)$$

其中係數 $A_i (i=1, \dots, 6)$ 、 $B_i (i=1, \dots, 6)$ 與 $C_i (i=1, \dots, 6)$ 等 18 個係數中僅 6 個是線性獨立的。茲選擇 $A_i (i=1, \dots, 6)$ 為線性獨立之係數，並將式(23a)-(23c)代入式(19a)-(19c)中之齊性微分方程部分，即可推得以下所示之關係式：

$$\begin{aligned} B_1 = -A_1 + \frac{2\eta + 1}{2\eta - 1} \frac{1}{\xi} A_2, \quad B_2 = -A_2, \\ B_3 = A_3 + \frac{2\eta + 1}{2\eta - 1} \frac{1}{\xi} A_4, \quad B_4 = A_4, \\ B_5 = -\frac{1}{\xi} \sqrt{\xi^2 + \beta\sigma_0 s} A_5, \\ B_6 = \frac{1}{\xi} \sqrt{\xi^2 + \beta\sigma_0 s} A_6, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \\ C_3 = 0, \quad C_4 = 0, \quad C_5 = -2\eta\beta\sigma_0 s \frac{1}{\xi} A_5, \\ C_6 = -2\eta\beta\sigma_0 s \frac{1}{\xi} A_6. \end{aligned} \quad (24)$$

式(19a)-(19c)之非齊性解，可以利用 Fourier 積分轉換方法推導出。茲對式(19a)-(19c)中之變數 \hat{z} 進一步作 Fourier 積分轉換，可得：

$$\begin{aligned} -(\omega^2 + 2\eta\xi^2)\tilde{U}_{rp}^* - i(2\eta - 1)\xi\omega\tilde{U}_{zp}^* \\ + \xi\tilde{P}_p^* = 0, \\ i(2\eta - 1)\xi\omega\tilde{U}_{rp}^* - (2\eta\omega^2 + \xi^2)\tilde{U}_{zp}^* \end{aligned} \quad (25a)$$

$$-i\omega\tilde{P}_p^* = 0, \quad (25b)$$

$$\left[(\omega^2 + \xi^2) + \beta\sigma_0 s \right] \tilde{P}_p^* = -\frac{Qt_0\alpha}{2\pi h^3 s} e^{-i\omega}, \quad (25c)$$

其中 $\{\tilde{U}_{rp}^*, \tilde{U}_{zp}^*, \tilde{P}_p^*\}$ 係定義為：

$$\begin{Bmatrix} \tilde{U}_{rp}^* \\ \tilde{U}_{zp}^* \\ \tilde{P}_p^* \end{Bmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_{rp} \\ \tilde{U}_{zp} \\ \tilde{P}_p \end{Bmatrix} \exp(-i\omega\hat{z}) d\hat{z}, \quad (26)$$

其 Fourier 反轉換則定義為：

$$\begin{Bmatrix} \tilde{U}_{rp} \\ \tilde{U}_{zp} \\ \tilde{P}_p \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_{rp}^* \\ \tilde{U}_{zp}^* \\ \tilde{P}_p^* \end{Bmatrix} \exp(i\omega\hat{z}) d\omega. \quad (27)$$

解析式(25a)-(25c)可得：

$$\tilde{U}_{rp}^* = -\frac{Qt_0\alpha}{4\pi\eta h^3 s} \frac{\xi}{\omega^2 + \xi^2} \frac{e^{-i\omega}}{\omega^2 + \xi^2 + \beta\sigma_0 s}, \quad (28a)$$

$$\tilde{U}_{zp}^* = \frac{Qt_0\alpha}{4\pi\eta h^3 s} \frac{i\omega}{\omega^2 + \xi^2} \frac{e^{-i\omega}}{\omega^2 + \xi^2 + \beta\sigma_0 s}, \quad (28b)$$

$$\tilde{P}_p^* = -\frac{Qt_0\alpha}{2\pi h^3 s} \frac{e^{-i\omega}}{\omega^2 + \xi^2 + \beta\sigma_0 s}. \quad (28c)$$

再引用式(27)對式(28a)-(28c)作 Fourier 積分反轉換，可推導出式(19a)-(19c)之非齊性解：

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{rp} = & \frac{Qt_0\alpha}{8\pi\eta h^3 \beta\sigma_0} \left\{ -\frac{1}{s^2} e^{-\xi|\hat{z}-1|} \right. \\ & \left. + \frac{\xi}{s^2 \sqrt{\xi^2 + \beta\sigma_0 s}} e^{-\sqrt{\xi^2 + \beta\sigma_0 s}|\hat{z}-1|} \right\}, \quad (29a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{zp} = & \pm \frac{Qt_0\alpha}{8\pi\eta h^3 \beta\sigma_0} \left\{ -\frac{1}{s^2} e^{-\xi|\hat{z}-1|} \right. \\ & \left. + \frac{1}{s^2} e^{-\sqrt{\xi^2 + \beta\sigma_0 s}|\hat{z}-1|} \right\}, \quad (29b) \end{aligned}$$

$$\tilde{P}_p = -\frac{Qt_0\alpha}{4\pi h^3} \frac{1}{s\sqrt{\xi^2 + \beta\sigma_0 s}} e^{-\sqrt{\xi^2 + \beta\sigma_0 s}|\hat{z}-1|}. \quad (29c)$$

式(29b)中加減符號之上標表 $|\hat{z}-1| \geq 0$ ，下標表 $|\hat{z}-1| < 0$ ，後面相關之方程式中，若加減符號同時出現，亦遵守此一原則。式(23a)-(23c)分別加上式(29a)-(29c)，即為式

(19a)-(19c)之通解，此通解需滿足式(20a)與式(20b)所示之邊界條件。將通解代入邊界條件之後，即可解出通解中之待定係數 $A_i (i=1, \dots, 6)$ ，故通解可改寫為：

$$\begin{aligned} \tilde{U}_r = & \frac{Qt_0\alpha}{8\pi\eta h^3 \beta\sigma_0} \left\{ -\frac{2\eta+1}{2\eta-1} \frac{1}{s^2} e^{-\xi(\hat{z}+1)} \right. \\ & + \frac{2\xi\hat{z}}{s^2} e^{-\xi(\hat{z}+1)} + \left(\frac{4\eta}{2\eta-1} - 2\xi\hat{z} \right) \frac{1}{s^2} e^{-\xi\hat{z} - \sqrt{\xi^2 + \beta\sigma_0 s}} \\ & - \frac{\xi}{s^2 \sqrt{\xi^2 + \beta\sigma_0 s}} e^{-\sqrt{\xi^2 + \beta\sigma_0 s}(\hat{z}+1)} - \frac{1}{s^2} e^{-\xi|\hat{z}-1|} \\ & \left. + \frac{\xi}{s^2 \sqrt{\xi^2 + \beta\sigma_0 s}} e^{-\sqrt{\xi^2 + \beta\sigma_0 s}|\hat{z}-1|} \right\}, \quad (30a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_z = & \frac{Qt_0\alpha}{8\pi\eta h^3 \beta\sigma_0} \left\{ \frac{2\eta+1}{2\eta-1} \frac{1}{s^2} e^{-\xi(\hat{z}+1)} \right. \\ & + \frac{2\xi\hat{z}}{s^2} e^{-\xi(\hat{z}+1)} - \left(\frac{2}{2\eta-1} + 2\xi\hat{z} \right) \frac{1}{s^2} e^{-\xi\hat{z} - \sqrt{\xi^2 + \beta\sigma_0 s}} \\ & - \frac{1}{s^2} e^{-\sqrt{\xi^2 + \beta\sigma_0 s}(\hat{z}+1)} + \frac{1}{s^2} e^{-\xi|\hat{z}-1|} \\ & \left. \pm \frac{1}{s^2} e^{-\sqrt{\xi^2 + \beta\sigma_0 s}|\hat{z}-1|} \right\}, \quad (30b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{P} = & \frac{Qt_0\alpha}{4\pi h^3} \frac{1}{s\sqrt{\xi^2 + \beta\sigma_0 s}} \left[e^{-\sqrt{\xi^2 + \beta\sigma_0 s}(\hat{z}+1)} \right. \\ & \left. - e^{-\sqrt{\xi^2 + \beta\sigma_0 s}|\hat{z}-1|} \right]. \quad (30c) \end{aligned}$$

式(30a)-(30c)尚需引用式(18)與式(22)進行 Laplace 與 Hankel 積分反轉換運算。因 $\hat{z}=0$ 所對應之地表面的水平暨垂直位移最為重要，故可將式(30a)-(30c)中之變數 \hat{z} 代入 $\hat{z}=0$ ，然後執行 Laplace 與 Hankel 積分反轉換[15]。基於此，可得知：

$$\begin{aligned} \hat{u}_r(\hat{r}, 0, \hat{t}) = & \frac{Qt_0\alpha}{2(2\eta-1)\pi h^3} \left\{ -\frac{c\hat{t}\hat{r}}{(1+\hat{r}^2)^{3/2}} \right. \\ & \left. + \frac{\hat{r}}{16} \int_0^{\hat{t}} \frac{c\hat{t}-c\tau}{(c\tau)^3} e^{-\frac{1+\hat{r}^2/2}{4c\tau}} \left[I_0 \left(\frac{\hat{r}^2}{8c\tau} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$-I_1\left(\frac{\hat{r}^2}{8c\tau}\right)d(c\tau)\Bigg\}, \quad (31a)$$

$$\hat{u}_z(\hat{r}, 0, \hat{t}) = \frac{Qt_0\alpha}{2(2\eta-1)\pi h^3} \left\{ \frac{c\hat{t}}{(1+\hat{r}^2)^{3/2}} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\hat{r}^2}{c\hat{t}}}\right) - \frac{1}{1+\hat{r}^2} \sqrt{\frac{c\hat{t}}{\pi}} \exp\left(-\frac{1+\hat{r}^2}{4c\hat{t}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{1+\hat{r}^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\hat{r}^2}{c\hat{t}}}\right) \right\}, \quad (31b)$$

其中 $c = 1/\beta\sigma_0$; $I_n(x)$ 為修正之 n 階的第一種類型 Bessel 函數 ; $\operatorname{erf}(x)$ 與 $\operatorname{erfc}(x)$ 分別為誤差函數 (Error Function) 與補誤差函數 (Complementary Error Function)。式(31a)與式(31b)為以簡單函數表示之地表水平暨垂直位移之暫態閉合解，應用式(31a)與式(31b)所示之暫態解，即可計算出任意時刻地表面之水平暨垂直位移量。

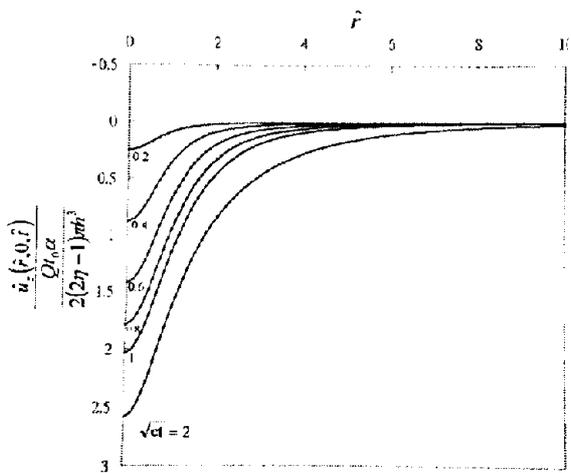


圖 2 抽水引致之地表依時沉陷變化曲線

圖 2 是根據式(31b)所繪製之無因次化地表依時沉陷曲線，只要將實際之地層參數暨抽水量等代入無因次化數值結果中，即可推算出地表任意點於任意時刻因抽地下水所引致之實際沉陷量。

五、結論

本文旨在探討等向性多孔隙飽和地層因單點抽水所引致之地表水平暨垂直暫態位移，研討過程乃根據 Terzaghi 與 Biot 的壓密沉陷理論，建立起非耦合之軸對稱壓密模式，再以 Laplace、Hankel 與 Fourier 積分轉換方法等推求問題之解，所研討出之解為暫態閉合解。

為驗證各項研究成果之正確性，作者除了將推導出之結果，以數值方法繪製數值結果，依圖形變化趨勢判斷其正確性之外，並將所研討出之暫態解，代回組成律、變位諧和條件、及力平衡方程式等基本方程式中，以確保所研討出之結果正確無誤。此外，亦曾將時間變數調整為無限大，再將孔隙水壓參數 B 調整為 1、不排水波松比 ν_u 調整為 1/2，以討論孔隙水與固體介質均為不可壓縮情況下，地表面之長期水平暨垂直位移，並與文獻[13]中已知之結果相互作比較，證明研討出之結果確實正確無誤。本文之研究成果，可作為研討非點抽水等相關問題之基礎，亦可據以計算地表之依時沉陷量，在工程上，極具有研究及應用價值。

誌謝

本文承蒙 NSC-93-2625-Z-216-001 國科會計畫補助，始得以完成，特此申謝。

參考文獻

1. Terzaghi, K., *Theoretical Soil Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, (1943).
2. Biot, M.A., "General Theory of Three-Dimensional Consolidation," *J. Appl. Phys.*, Vol. 12, pp. 155-164 (1941).
3. Biot, M.A., "Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid," *J. Appl. Phys.*, Vol. 26, pp. 182-185 (1955).
4. Bear, J. and Corapcioglu, M.Y.,

- "Mathematical Model for Regional Land Subsidence Due to Pumping, 2, Integrated Aquifer Subsidence Equations for Vertical and Horizontal Displacements," *Water Resource Research*, Vol. 17, pp. 947-958 (1981).
5. Corapcioglu, M.Y. and Bear, J., "A Mathematical Model for Regional Land Subsidence Due to Pumping, 3, Integrated Equations for a Phreatic Aquifer", *Water Resources Research*, Vol. 19, pp. 895-908 (1983).
 6. Safai, N.M. and Pinder, G.F., "Vertical and Horizontal Land Deformation in a Desaturating Porous Medium," *Advan. Water Resour.*, Vol. 2, No. 1, pp. 19-25 (1979).
 7. Safai, N.M. and Pinder, G.F., "Vertical and Horizontal Land Deformation Due to Fluid Withdrawal," *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 4, pp. 131-142 (1980).
 8. Lewis, R.W. and Schrefler, B.A., "A Fully Coupled Consolidation Model of the Subsidence of Venice," *Water Resources Research*, Vol. 14, No. 2, pp. 223-230 (1978).
 9. Lewis, R.W. and Schrefler, B.A., "A Finite Element Analysis of Surface Subsidence," in S.K. Saxena(ed.), *Evaluation and Prediction of Subsidence*, ASCE, New York, pp. 400-416 (1978).
 10. Yeh, H.-D., Lu, R.-H. and Yeh, G.-T., "Finite Element Modelling for Land Displacements Due to Pumping," *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 20, pp. 79-99 (1996).
 11. Booker, J.R. and Carter, J.P., "Analysis of a Point Sink Embedded in a Porous Elastic Half Space," *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 10, No. 2, pp. 137-150 (1986).
 12. Booker, J.R. and Carter, J.P., "Long Term Subsidence Due to Fluid Extraction from a Saturated, Anisotropic, Elastic Soil Mass," *Q. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 39, No. 1, pp. 85-97 (1986).
 13. Tarn, J.Q. and Lu, C.C., "Analysis of Subsidence Due to a Point Sink in an

Anisotropic Porous Elastic Half Space," *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 15, No. 8, pp. 573-592 (1991).

14. Skempton, A.W., "The Pore-Pressure Coefficients A and B," *Geotechnique*, Vol. 4, pp. 143-147 (1954).
15. Abramowitz, M. and Stegun, I.A., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, Inc., New York, (1970).

Transient Closed-Form Solutions of the Horizontal and Vertical Ground Surface Displacements Due to a Point Sink

John C.-C. Lu* Feng-Tsai Lin**

*Department of Civil Engineering,
Chung-Hua University

**Department of Naval Architecture,
National Kaohsiung Marine University

ABSTRACT

Based on Biot's three-dimensional consolidation theory of porous media, the transient land subsidence of a saturated elastic half-space containing a point sink due to fluid withdrawal is studied. In the formulation, the pore water and solid skeleton are treated as compressible. As pumping of water from an aquifer takes place, the pore water pressure is reduced in the withdrawal region. This leads to an increase in the effective stress between the soil particles and subsidence of ground surface. The soil mass is modeled as isotropic porous media to simulate the earth medium. Closed-form solutions of the consolidation deformation are obtained by using the Laplace, Hankel and Fourier integral transform techniques. Results can provide a better understanding of the influence of pumping on the subsidence.

Keywords: half-space, porous medium, point sink, transient consolidation settlement

以下論文已發表，論文基本資料如下：

呂志宗、謝瑜萱，2004/12/24，「網路化互動式多媒體教學在河川生態工法之應用探討」，運用資訊科技創新教學以發展數位機會研討會論文集，摘要集第 10 頁。
(本文係在國科會研究計畫 NSC-92-2516-S-216-002 和 NSC93-2625-Z-216-001 補助下所完成。)

網路化互動式多媒體教學在河川生態工法之應用探討

呂志宗¹ 謝瑜萱²

¹ 中華大學土木工程學系副教授 cclu@chu.edu.tw

² 中華大學土木工程學系碩士班研究生 m9104010@chu.edu.tw

摘 要

本多媒體教材考量使用者為學習過程中之核心的設計理念，整合動畫、音訊、圖片以及文字等，實現學習內容的多媒體化。所介紹之內容係以北台灣 14 條野溪之整治案例，作為河川生態工法之案例探討對象。應用自行開發設計完成之網路化互動式多媒體教學軟體，於網頁中設計了數種控制介面，並以虛擬動物對話闡述生態工法概論、生態工法設計原則等。介紹內容還包括各河川所引用生態工法的基本概念、工法分類、設計理論、各種型態之生態工法與人文環境等。本文之研究成果有助於生態工法之認識與推廣，並可強化數位學習之內容。

關鍵字：生態工法、電腦輔助教學、動畫設計、數位學習

Study of the Internet-Based Interactive Multimedia Instruction on River Ecological Engineering Method

John C.-C. Lu and Yu-Hsuan Hsieh

*Department of Civil Engineering
Chung-Hua University
Hsinchu, Taiwan 300, R.O.C.*

ABSTRACT

The teaching materials on river ecological engineering methods are completed with the help of internet-based interactive multimedia techniques. This software helps to popularize the concept of the ecological environment protection, and it demonstrates the advantages of river ecological engineering methods. The presented multimedia teaching material integrates text, video, animation, graphic, image and 3D effect, etc., to introduce the river ecological engineering method. The organized web designed several interface icons and virtual animals to introduce the basic concepts and principles of river ecological engineering methods. There are 14 application cases of river ecological engineering methods around northern Taiwan are demonstrated. The

demonstration includes basic concepts, engineering methods classification, designing theories, types of the ecological engineering methods and cultural circumstances. The users can get the fundamental concepts of river ecological engineering methods following step-by-step self-learning processes. This software helps to popularize the concept of river ecological engineering methods and can enhance the contents of E-learning.

Keywords: Ecological Engineering Method, Computer-Assisted Instruction, Animation Design, e-Learning

一、前言

教學內容與設計策略，現已成為網路教學品質指標的核心。電腦網路於遠距教育系統的應用，主要目的即在充分運用全方位教學資源，將學校內外各種資訊設備與系統連結整合於一體，希望可以達到適時式學習以及全球化教學服務的目的。電腦網路應用於遠距教育系統的實施，較一般傳統教育更有彈性，且富有多樣性的選擇，為未來學校教育的新趨勢。

由於生態環境保育的意識抬頭，以安全與實用為前提下之生態工法(Ecological Engineering Method)的呼聲與日遽增。生態工法的基本精神之一是遵循自然法則，把屬於自然的地方還給自然。過去野溪治理工程主要是減輕或避免野溪災害所造成的損失為目標，而今治理工程已漸漸注重其對於生態的影響，並強調野溪景觀應與其周圍環境相互調諧。欲維持生態平衡，營造河川景觀及保護生物棲息環境，採用生態工法乃為必然之趨勢。本多媒體教材旨在推動河川生態工法，強化數位學習內容。

於設計與製作教學媒體的過程中，應考慮以下八項有利於教學成效之要點(Kemp 等人, 1989)：

1. 讓內容選擇與組織更精緻：當設計製作一套教學媒體時，教師應事先仔細思考其內容。
2. 讓教學的實施更標準化：於不同情境下，每一位教師對同樣教材內容可能會有不盡相同的說明。然而，使用教學媒體可以減低這種差異性，因為教學媒體涵蓋標準化的訊息。
3. 讓教學更有趣：多媒體之教學，應能讓使用者保持敏銳的學習狀態，而有助於提昇學習者的學習成效。
4. 應用適當的學習理論，使學習更具互動性：多媒體教材之設計者應對教學理論有基本之認識，才能呈現優良之教學媒體內容並導致更好的教學。
5. 減少學習時間需求：相對於傳統教學，大部分的媒體均呈現以較少的時間傳遞教學內容。
6. 提昇學習品質：只要能將圖像、聲音、文字、動畫、影片等妥善加以組合，教學媒體應可將知識有條理的傳播給學習對象。
7. 教學可以隨時依需要而進行：教學媒體若是為了個別學習而設計，那麼學習者可以依個人需求而不受時間與地點的限制來進行學習。
8. 可加強個人對於學習內涵與過程的正面態度：學習者若能感受到媒體學習的樂

趣並獲得滿足，教學軟體再適時給予正面的評價，則可加強學習者的學習效益。

當今之電腦介面與編輯軟體均已開發成功，故今日所建誥之電腦輔助學習系統，已完全符合學習理論。其係以認知心理學為基礎、建構主義為理念、行為學派的設計為精神，並以練習、情境模擬、真實等模式加以設計，強調學習者能獲得原有知識 (Prior Knowledge)，學生與電腦可以產生雙向互動，以及適當的回饋等，是一嶄新的教學媒體。它的主要特色如下 (湯清二，1995)：

1. 強調個別化的學習。
2. 軟體設計原則包括：學生的起點行為、學習者控制(Learner Control)方式設計、交互式(Interactive)設計、資料庫之安排、學習情境的安排、增進學習動機、概念圖(Concept Map)的安排等七項。
3. 重視同儕間之合作學習：合作學習的方式將更為普遍，學生同儕間以小組(2~3人)為學習群體的學習方式，將大行其道。

二、網路教學探討

2.1 網路教學發展

網路教學的發展始於遠距教學，與傳播媒體密不可分。1833年，瑞典最早利用報紙媒體的廣告欄提供學習者寫作練習。隨著電訊傳播科技的進步，廣播、電視廣泛融入生活中，遠距教學便可緊緊抓住傳播媒體特性，將教學與媒體加以結合。1934年，愛荷華州立大學首先使用電視製作教學課程；時至1996年已發展出四百種對外播放的教育課程。1970年代，英國開放大學實施遠距教學並有效的整合教學媒介，成績斐然，各國便風起雲湧效仿之 (施大偉等人，2003)。

1960至1980年代，伊利諾大學率先利用電腦播放教學畫面，開啟了電腦輔助教學發展時期。同時期，源於美國國防部的網路建設，也由於它的便利性，擴展成無遠弗屆的全球資訊網。1990年代電腦的普及與網際網路的蓬勃發展，將傳播與遠距教學推向網路與多媒體結合的新紀元。國內自1994年成立國家資訊通信基礎建設推動專案小組後，積極規劃高速網路、應用實驗平台及三套遠距教學實驗系統。1997年起曾實施為期四年的「遠距教學中程發展計劃」。1999年進一步開放大專院學辦理「非同步網路遠距教學」，承認非同步教學(Asynchronous Teaching)的學分，使得教學的設計與學習方式更具自由。

教育部於2001年頒佈的「專科以上學校實施遠距教學作業規範」，使網路教學方式之課程運作有所依據。根據教育部電算中心的統計，90學年度計有一百多門同步教學(Synchronous Teaching)與非同步教學課程開設，選修人數超過數千人。由此可知，網路教學已逐漸成為各校的發展重點工作。當學習者漫遊於網路世界時，同時也正在建構自己的知識體系與社會人際關係。因為網路具有知識的架構，也同樣像是一個微縮的社會，因此學生在網路世界中的經驗，在將來進入實際社會時，會是一個很好的歷程 (惠志堅，1997)。

2.2 電腦網路與遠距教學的結合

利用電腦網路與遠距教育所形成的教學環境之特性如下(鄭建良，1995)：

1. 學習途徑開放化：多種傳播的管道，可提高學習的開放性。
2. 學習方式多樣化：透過多媒體及互動式學習，可增進學習效果。

3. 資訊流通全球化：無線播送與有線傳輸結合，可由區域學習網路發展為全球資訊體系，加速知識的流通與取用。
4. 學習進度個別化：由傳播及網路系統所形成的學習資料庫，或電子資訊網 (Electronic Information Network)，學習者可依教材結構或個人需求彈性學習，達到個別學習的理想。
5. 教學對象普遍化：教學對象眾多，不受量的限制。
6. 學習空間分散化：學習者散佈於各地區，不受空間限制。
7. 學習時間即時化：學習者可掌握適合自己的學習時間，不受時間的限制。

三、生態工法簡介

3.1 生態工法基本原則

由 Bergen (2001) 所提出的生態工程設計原則包括以下幾點：

1. 因地制宜：面對一個工程設計需先自問：這裡是什麼？大自然會容許我們在此做什麼？大自然會幫我們什麼？
2. 維持所設計的各项功能需求的獨立性：「功能需求 (Functional Requirements, FR_S)」是指所設計出的解決方案所能提供的特定功能，「設計因子 (Design Parameters, DP)」則泛指為滿足 FR_S 而選擇出的解決方案裡所有的物理因子。最佳設計則是指任何一個獨立的 FR_S 只有一個 DP 來滿足它。
3. 承認激發生態設計的價值與意義：生態工法的思維中，可抽剝出比傳統工程更複雜的特質，包括不確定性、環境倫理、人性的複雜度、精神利益、意識型態、以及道德觀等。傳統工程師被賦予的責任在於保護及服務社會，明顯將最原始、最終的基盤自然系統摒除在外。但是生態設計同時包含了「失敗的安全」與「安全的失敗」兩種可能性，無論結果為何，該設計都有其價值與意義。

3.2 溪流整治工法

河溪整治於規劃設計階段，應視河溪環境與鄰近相關資源，作有效之整合，結合現有資源以提供更完善之規劃以滿足需求。整治工程施工時常會破壞原有之自然景觀，致失去自然原有之生命力。整治工程設計時應注意幾項重要原則 (林鎮洋等人, 2003)：

1. 綠帶及藍帶之結合。
2. 視覺環境景觀之調和。
3. 生物遷徙通道之維持。
4. 於溪流用地許可下，儘量維持原有自然溪溝之蜿蜒度。
5. 於排洪安全原則下，儘量減少槽化護岸構造，維持溪岸自然風貌。
6. 於水利安全要求下，河幅規劃可配合原溪溝自然形狀之寬狹程度。
7. 水質的維護。

四、網路化互動式多媒體教材製作

4.1 製作軟體之選用

於設計與製作互動式多媒體教學軟體時，除須有明確的教學內容，亦須熟悉互動式多媒體編輯工具之使用，如此方能順利進行教材之製作。

1. Flash MX

為 Macromedia 公司於 1996 年所正式發表，是以時間軸為基礎的軟體。具有多媒體整合功能，能整合聲音、圖片、動畫、互動式設計等，其功能特色包括（蔡俊平，2003）：

- (1) 卓越的向量圖形編輯。
- (2) 強大的媒體支援。
- (3) 優異的互動編輯功能。

使用 Flash MX 製作動畫影片時，可遵循如圖 1 所示之工作流程，如此有條不紊的順利完成影片創作。

2. Dreamweaver MX

Dreamweaver MX 為 Macromedia 公司最新推出的網頁軟體。其人性化之設計元素，可快速完成幾乎所有網路應用技術的編輯。

3. Photoshop

為一套平面設計師所推崇的影像處理軟體。其係結合平面設計、網頁影像設計以及網頁動畫的影像處理軟體，功能相當完善。

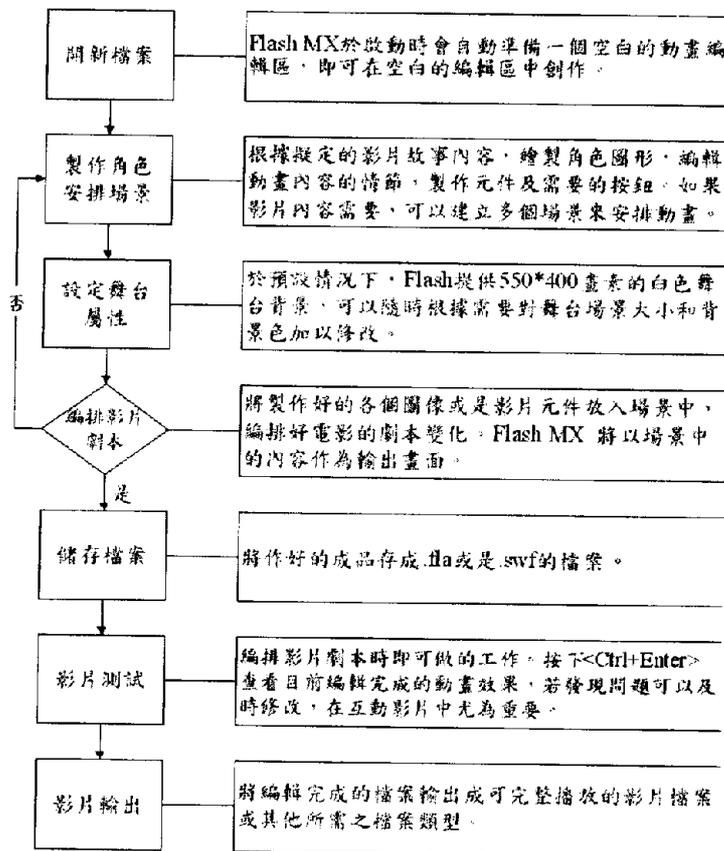


圖 1 Flash 平台上製作多媒體教材之工作流程

4. PhotoImpact

不同於一般的影像處理軟體，PhotoImpact 是以物件為導向，因此物件是 PhotoImpact 的學習重點，製作網頁時，於網頁版面的分割與製作上，幾乎是自動化。百寶箱之應用也是一大特色，修改百寶箱內容，套用到影像上，簡單快速，且符合美的需求。

4.2 製作硬體之選用

由於製作網路化互動式多媒體教學教材需處理大量的影音、影像以及使用多種類型的編輯軟體，故其硬體設備至少應包括：Pentium III 650 MHz 以上之中央處理器、256 MB 以上的暫存記憶體、40 GB 以上之硬碟空間、MX440 以上顯示卡、音效卡以及網路傳輸線，建議使用非對稱數位用戶線路(ADSL)，傳輸速度為 1.544 Mbps，傳輸速度較快。

4.3 多媒體教材之製作

「多媒體製作」指的是將文字、圖形、語音、影像、動畫等過去呈現資訊的各式媒介加以整合的現代技術。經由報紙、廣播、電視為主的傳統資訊呈現方式，今後將整合成一體，視聽大眾因此可以同時享用文字、圖形、語音、影像，獲取資訊(陳偉之，2002)。

「多媒體製作」之所以能夠呈現，有兩種原因：一是數位化資訊(Digital Data)處理技術的進步；二是電腦光碟機(CD-ROM)儲存容量的擴大。

多媒體的目的在於提供充分的溝通管理，適應學習者認知上之個別差異，並以最佳的呈現方式將教學內容表達出來。同時，教學策略經由多媒體教學，可提供不同的溝通管理，使學習者獲得最佳效果。本教學多媒體之製作係以 Flash MX 軟體為動畫編輯平台。茲以關鍵之畫面設計、畫面設計說明、文字、旁白、音樂、動畫等，說明所設計出之網路化互動式多媒體輔助教材，如表 1 至表 5 所示；有關設計內容之連結方式及操作說明部分，則如圖 2 所示。

本軟體共介紹北台灣 14 條野溪之整治案例，包括基隆友蚋溪、基隆河、台北新店溪、木柵萬壽溪、南港四分溪、松山虎山溪、內湖大溝溪、士林內厝溪與平菁街溪、北投貴子坑溪與水磨坑溪、新竹九芎湖溪、桃園龍潭南坑溪、苗栗新店溪永興段等共 14 個案例。教材呈現方式盡量予以標準化，內容包括治理緣起、設計理念、治理效益、案例照片以及 3D 環景等。各項工程之治理型態又可分為下列幾種：

- 北投貴子坑溪、北投水磨坑溪等地區：其治理型態為「治山防洪」。
- 苗栗獅潭鄉新店溪永興段等地區：其治理型態為形成「環境美化區」。
- 基隆友蚋溪等地區：其治理型態為「維護原始生態」。
- 新竹新埔九芎湖溪等地區：其治理型態為「富麗農村」。
- 桃園龍潭南坑溪等地區：其治理型態為「使用多種護岸設計」。
- 南港四分溪、士林內厝溪等地區：其治理型態屬於「早期景觀野溪整治」。
- 士林平菁街溪、內湖大溝溪、木柵大溝溪、松山虎山溪等地區：其治理型態屬於「近期景觀野溪整治工程」。

表 1 河川生態工法之開頭動畫

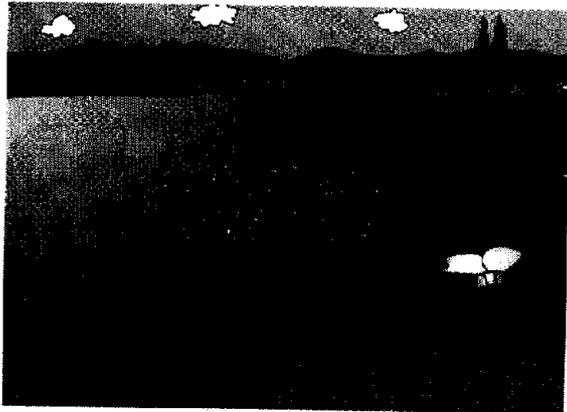
	<p>說明：以蝴蝶飛舞作為開頭動畫，搭配輕快的背景音樂，希望藉此動畫、影音效果，帶領學習者進入生態工法的領域。</p>
	<p>說明：以活潑之虛擬人物對話闡述生態工法概論。</p>
<p>文字</p>	<p>河川生態工法之網路化互動式多媒體教學。</p>
<p>旁白</p>	<p>人類基於對生態系統的深切認知，為落實生物多樣性保育及永續發展，採取以生態為基礎，安全為導向，減少對生態系統造成傷害的永續系統工程。讓我們更能夠善用自然的材料與力量，因地制宜規劃具滯洪功能設施，創造多孔性之河道與護岸，開拓出人類與其他生物共存共榮的景象。</p>
<p>音樂</p>	<p>以輕快之音樂作為開頭背景音樂。</p>
<p>動畫</p>	<p>以蝴蝶飛舞作為開頭動畫，接著青蛙學生與羊老師進場，以對話方式，闡述生態工法概論，並且概略介紹整個網站之內容。</p>

表 2 生態工法概論

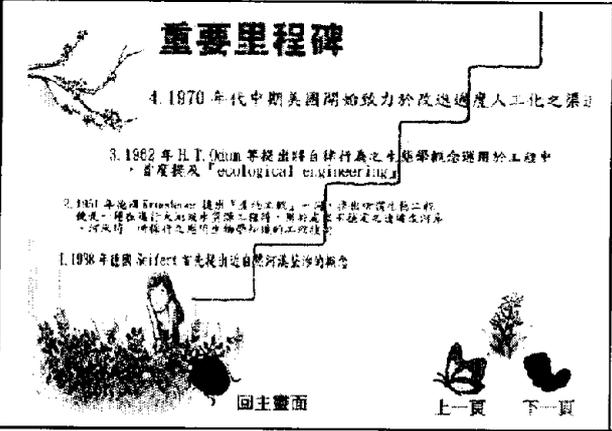
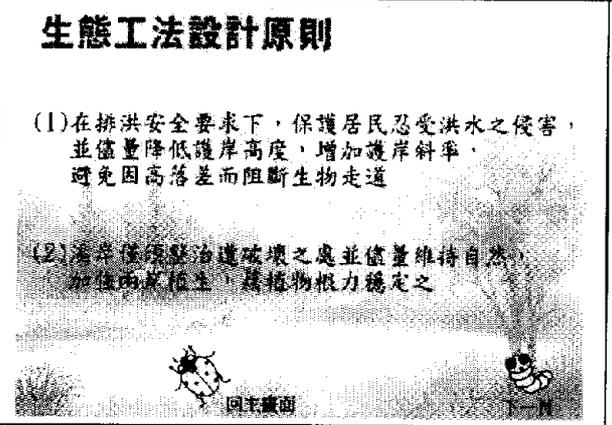
 <p>生態工法定義</p> <p>生態工法設計原則</p> <p>生態工法所能發揮的功能及其影響</p> <p>生態工法之基本精神</p>	<p>說明：以生動活潑之昆蟲作為各個子畫面之連結按鈕，希望藉此畫面告訴學習者，生態復育對我們的重要性。</p>
 <p>重要里程碑</p> <p>4. 1970年代中期美國開始致力於改造過度人工化之渠道</p> <p>3. 1962年 H.T. Odum 等提出『自然行為之生態概念應用於工法中』首度提及『ecological engineering』</p> <p>2. 1951年德國 Brunsen 提出『自然的工法』一詞，意指恢復自然工法，就是一種在進行大規模工程前，對於原有系統之連續性與再生，所進行之生態學與生物學之工程學。</p> <p>1. 1936年德國 Drifert 首先提出自然河流淤沙的概念</p> <p>回主畫面 上一頁 下一頁</p>	<p>說明：生態工法定義中，告知學習者生態工法之重要里程碑。</p>
 <p>生態工法設計原則</p> <p>(1) 在排洪安全要求下，保護居民忍受洪水之侵害，並儘量降低護岸高度，增加護岸斜率，避免因高落差而阻斷生物走道</p> <p>(2) 淤洪區域整治遭破壞之處並儘量維持自然，加強兩岸植生，藉植物根力穩定之</p> <p>回主畫面</p>	<p>說明：以條列敘述方式，告訴學習者生態工法的設計原則。</p>
<p>文字</p>	<p>河川生態工法概論。</p>
<p>旁白</p>	<p>無。</p>
<p>音樂</p>	<p>以柔和之音樂為背景音樂。</p>
<p>動畫</p>	<p>以兔子、青蛙以及小熊帶領學習者進入生態工法概論之領域。以瓢蟲作為回主畫面之按鈕、蝴蝶作為上一頁的按鈕、毛毛蟲作為下一頁的按鈕。</p>

表 3 河川生態工法介紹

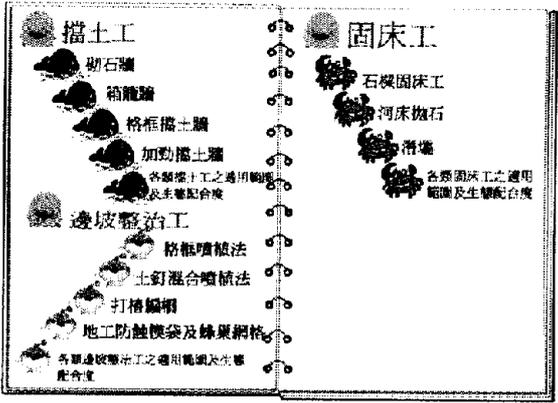
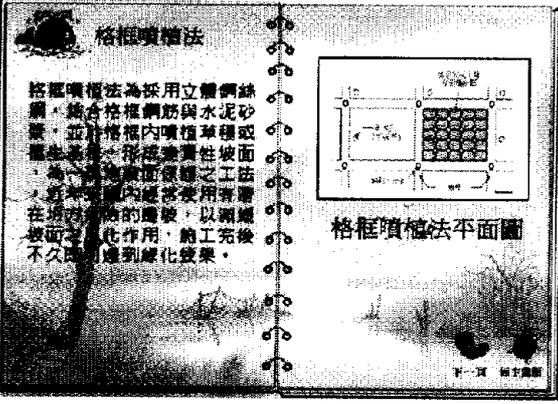
	<p>說明：以書的封面作為工法介紹之開頭，接著會有翻書的動作，帶領學習者進入工法介紹的領域。</p>
	<p>說明：工法介紹中，又分為三個主要項目：「擋土工」、「邊坡整治工」以及「固床工」，可讓學習者知道各工法之適用性以及生態的配合度等情況。</p>
	<p>說明：以邊坡擋土工之格框噴植法為例，首先介紹何謂格框噴植法，並顯示其平面圖。按下一頁的按鈕，會出現其設計原則。</p>
<p>文字</p>	<p>河川生態工法之介紹。</p>
<p>旁白</p>	<p>無。</p>
<p>音樂</p>	<p>以輕快之音樂作為背景音樂。</p>
<p>動畫</p>	<p>以翻書的動畫作為起始畫面，鯨魚、螃蟹以及小魚等作為子項目中之互動按鈕，可讓學習者自由點選。</p>

表 4 河川生態工法之工程断面圖介紹

	<p>說明：針對台北四條野溪繪製 38 張工程断面圖，並且將之彙整在如左圖所示表中。</p>
	<p>說明：這是大湖山莊大溝溪之施工位置圖，可讓學習者清楚其施工地點。</p>
	<p>說明：此圖為繪製的框型植生護坡示意圖，圖中標示其錨筋的尺寸，以及框型植生之處。以蛋為形狀的互動按鈕作為倒退鍵，可回至匯整表格處。</p>
<p>文字 河川生態工法之工程断面圖。</p>	<p>旁白 無。</p>
<p>音樂 無。</p>	<p>動畫 以四種不同的蛋型作為互動按鈕，包括：於一般狀態時是正常的蛋形，滑鼠按下後會出現小鴨；或者於一般狀態下時是蛋的形狀，滑鼠按下後蛋殼顯示已破掉。作者係擬以不同的動畫按鈕，使畫面更加活潑、有趣。</p>

表 5 河川生態工法之案例介紹

<p>案例介紹</p>	<p>說明：本輔助教學教材共介紹北台灣 14 個案例，從基隆、台北、桃園等一直到苗栗。係以毛毛蟲為互動按鈕，按下毛毛蟲，即可進入案例介紹部分。</p>
	<p>說明：每一案例介紹前，都有一個開頭小動畫。這是一個小女孩澆花的動畫，由這個開頭小動畫可引出五個子項目選項。</p>
	<p>說明：每一個案例中，按鈕選項又包括了治理緣起、治理效益、設計理念、案例照片以及 3D 環景等五部分。例如，按下鯨魚按鈕即可進入治理緣起。</p>
<p>文字</p>	<p>河川生態工法之案例介紹。</p>
<p>旁白</p>	<p>無。</p>
<p>音樂</p>	<p>無。</p>
<p>動畫</p>	<p>每個案例前都有一個開頭小動畫，包括了小女孩澆花、工人砌石等等，希望藉此動畫讓學習者產生學習興趣，增加學習效果。</p>

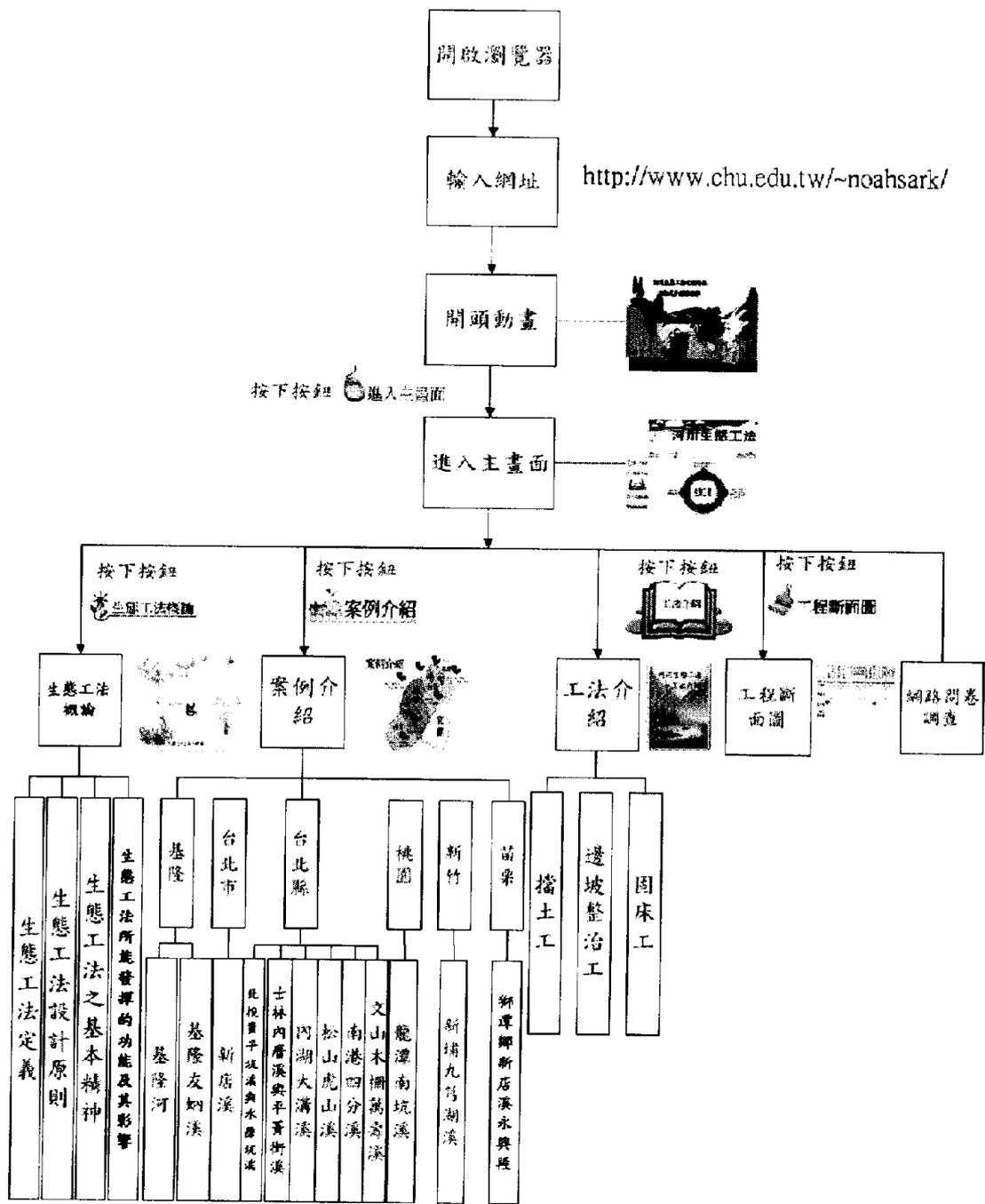


圖 2 連結內容及操作說明

五、結語

1. 本網路化互動式多媒體教材係以 Flash MX 為課程製作平台、以 Dreamweaver MX 為網頁編輯平台，建構出河川生態工法之教學內容。利用互動介面、超連

- 結特性，使內容活潑化，以提高學習興趣與成效。
2. 於教材蒐集與整理方面，共花費兩年的時間拍照、攝影，並將其處理成可應用之數位檔案類型，將之呈現內容與以標準化。希望藉此 14 條野溪之現地資料的介紹，增進本研究之實用價值。
 3. 目前所完成的互動式多媒體輔助教學教材係規劃為 54 個小時的課程，希望藉由基本觀念與動畫的介紹，來引導學習者認識生態工法。本教材所設計出之動畫活潑有趣，互動介面具有人性化且內容活潑，應可提高使用者的學習動機與成效。本教學軟體適用於學習生態工程相關課程的使用者作輔助學習，亦可幫助教授生態工程相關課程的老師進行輔助教學。
 4. 所研發之「生態工法網路輔助教學教材」曾獲遠東技術學院主辦、國科會及教育部指導之「九十二學年度自製教學媒體競賽暨觀摩研習會」之「佳作獎」，並受邀於會場公開聯合展出，目前仍持續於網際網路 <http://www.isslp.mis.fec.edu.tw/fec/> 中公开展出 (2004.6.4-迄今)，相關單位很多均相當重視並參考。以上各項研究成果，亦已安置在個人網頁 <http://www.chu.edu.tw/~noahsark> 中，以此為基礎，可繼續加以改進，為生態工程之教學作出貢獻。

六、誌謝

本文係在國科會計畫 NSC-92-2516-S-216-002 和 NSC-93-2625-Z-216-001 補助下所完成，特此申謝。

七、參考文獻

- Bergen, S. D., S. M. Bolton and J. L. Fridley, "Design Principles for Ecological Engineering," *Ecological Engineering*, Vol. 18, pp.201-210 (2001).
- Kemp, J. E. and D. C. Smellie, *Planning, Producing, and Using Instructional M.E.D.I.A.*, 6th ed., Harper & Row. Publishers, Inc., pp. 3-4 (1989).
- 林鎮洋、邱逸文，「生態工法論」，明文書局出版，第 1-44 頁 (2003)。
- 施大偉、張淑滿、馬成珉，「學校導入網路教學環境之實作策略分析—以私立大學為例」，遠距教育國際學術研討會論文集 II，第 147-160 頁 (2003)。
- 陳偉之，「多媒體製作與網路傳播之教學研究」，社會科學專刊，第五期，第 88-103 頁 (2002)。
- 惠志堅，「電腦媒體通訊對教育的影響」，資訊與教育雜誌特刊，第 188-193 頁 (1997)。
- 湯清二，「互動式多媒體教學的特色發展趨勢與師資培育」，教育實習輔導，第一卷，第二期，第 33-35 頁 (1995)。
- 鄭建良，「電腦網路在中小學遠距教育之應用探討」，資訊與教育雜誌特刊，第 111-118 頁 (1997)。
- 蔡俊平，「動態網頁設計大師」，學貫出版社，第 153 頁 (2003)。

以下論文已發表，論文基本資料如下：

呂志宗，2005/9/8-10，「深層溫泉開發所引致之地層力學行為變化探討」，第十一屆大地工程研討會論文集，第 I09-1~I09-5 頁。(本文係在國科會研究計畫 NSC93-2625-Z-216-001 補助下所完成。)

深層溫泉開發所引致之地層力學行為變化探討

呂志宗¹

摘 要

本文引用 Biot 所建立之多孔介質彈力理論，並於理論模式中考慮熱量傳輸效應的影響，建立深層溫泉開發所引致地層力學行為變化之數學模式並加以解析。分析模式中，因不考慮地表邊界的影響，故將溫泉地層模擬無限域地層；有關地層之力學、滲流與熱流性質等係模擬為等向性。並引用牛頓第二運動定律、虎克定律、質量守恆定律、達西定律、能量守恆定律及熱傳導定律等自然律，建立問題之基本方程式，再以積分轉換方法加以解析，研討出單井溫泉開發所引致之地層力學行為變化的閉合解。

關鍵詞：溫泉，多孔介質，無限域，閉合解。

THE MECHANICAL BEHAVIORS OF THE STRATUM DUE TO A DEEP HOT SPRING EXPLOITATION

John C.-C. Lu

ABSTRACT

Based on Biot developed elasticity theory of poro-mechanics, the thermal effect is added to the theory to study the mechanical behaviors of the stratum due to deep hot spring exploitation. The stratum is treated as an infinite space for the influence of the half-space boundary can be neglected. The properties of mechanics, seepage and thermal flow of the stratum are considered as isotropic. The basic governing equations are constructed on the basis of Newton's second law, Hooke's law, mass balance, Darcy's law, energy conservation and heat conduction law, etc. Closed-form solutions are derived for the mechanics of the stratum due to a hot spring point sink are derived by using the integral transform techniques.

Key Words: Hot Spring, Porous Medium, Infinite Space, Closed-Form Solution.

一、前言

溫泉的開發，從早期的農漁業用途，演變至今已轉變成高度的商業化用途。目前溫泉的經營開發，其功能訴求主要是注重在能消除疲勞及擁有特殊的療效等。溫泉業的抬頭及溫泉的開發利用，雖然對於振興觀光事業，維護國民健康等均有重大的助益，但其對於地層所產生的力學行為變化與熱流暨滲流平衡破壞等之影響，則仍有待探討，此為本文之研究重點。

溫泉觀光業是政府極力推廣的觀光產業之一，然而根據學者專家們的研究得知，台灣地區現有的溫泉開發實已逐漸達到飽和，許多業者皆反應無法取得足量的溫泉水源，而必需以非溫泉水源替代、過渡回收或化學製造等方式供應溫泉，亦即台灣地區的溫泉許多實際上均已呈超量開發。因此，台灣地區各地的溫泉現況，應有必要定期以科學化的調查方式，建立相關的資料庫，以供政府相關決策單位參考。

溫泉也是地下水的一種，若是超量開發，一樣也是會有地質災害的危險，只因溫泉抽水區的地質條件較佳或因人煙稀少等因素，而較常被人們所忽略，但是亦應未雨綢繆，瞭解抽取溫泉所可能引致之地層力學行為變化等問題，以防範於未然。

本文擬以數理解析的方法，建立溫泉抽水問題之數學模式，再引用積分轉換方法加以解析。數學模式中，係將地層模擬為均質等向之多孔介質，所研討出之解為穩態 (Steady-State) 情況下的閉合解。

二、文獻回顧

由文獻[1]之記載得知，溫泉一般是指由地下湧出的泉水且其溫度高於人體的體溫者。但是，另有一種解釋是說，只要泉水溫度高於當地平均溫度 5°C 以上者也可以稱為溫泉。實際上各國對溫泉的認定仍有差異，例如美國認定 21°C 以上之泉水即為溫泉，義大利等歐洲國家則認定 20°C 以上

的泉水為溫泉，而日本、南非等國則以水溫高於 25°C 的泉水定義為溫泉。

2005 年 7 月 22 日經濟部水利署「經水字第 09404605610 號令」[2]所訂定溫泉標準第二條中說明，符合標準之溫水，係指溫泉露頭或溫泉孔口測得之泉溫為攝氏三十度以上且泉質符合下列各款之一者：

1. 溶解固體量：在五百 (mg/L) 以上。
2. 主要含量陰離子：碳酸氫根離子 HCO_3^- 二百五十 (mg/L) 以上、硫酸根離子 SO_4^{2-} 二百五十 (mg/L) 以上或氯離子 (含其他鹵族離子) Cl^- 二百五十 (mg/L) 以上。
3. 溫度未達攝氏三十度，但水質符合礦物質標準者，也可稱為溫泉。

由文獻[3]得知，溫泉主要是由降水、河水及湖泊水等地面水滲入地下，在深處加熱後，再循環上升至地面所形成。因此，必須在適當地質與地形條件下，始能促成地下水進入深循環而產生溫泉。

一般而言，形成溫泉的理想條件包括適宜的地質構造或岩層，如多孔隙高透水性或具破碎的岩層、深長裂隙或斷層帶，以提供水循環的通路；另外，須有充沛的降雨量與地下水水源，以及較高的地溫梯度，作為溫泉水的熱源。亦即「熱源」、「通路」及「水源」為溫泉形成的三大要素[4]。

近年來，台灣地區之溫泉開發，已逐漸普及至住宅社區，且其社區溫泉鑽鑿深度常深達千餘公尺。實際上，各界對開鑿如此深的溫泉井尚無法保證一定能夠永續經營利用，其主要原因是多數溫泉開發地點之水文地質條件的不確定因素太多所致。這些人為開鑿的溫泉深井，其地表邊界的影響微小，故可將地層模擬為無限域 (Infinite Space) 情況。

作者[5、6]對溫泉抽水問題之探討，已有一定之基礎，本文擬進一步探究深層溫泉開發所引致的地層力學行為變化等。溫泉抽水與一般常見的水井抽水類似，但考慮溫泉抽水問題時，還應該考慮熱流效應的影響。Terzaghi[7]首先引用有效應力觀念 (Effective Stress Concept)，說明地層受外力荷重時土壤的單向度沉陷行為，在 Terzaghi[7]的理論模式中，須先解析出平衡孔隙水壓力，然後再間接計算出地層的壓密沉陷量，故稱之為非耦合 (Uncoupled) 壓密模式。然而 Biot[8、9]所考慮之孔隙水的平衡過程係與固體土壤直接相關，所得出之結果亦被證實較為合理可靠，本文即引用 Biot 三維壓密模式建立基本方程式。Biot[8、9]所建立之三維壓密理論，在學理上亦常被稱之為多孔介質彈性力學理論 (Poro-elasticity)。

為考慮溫泉中之熱流效應的影響，必須在多孔介質彈性力學理論中再加入熱能流動所引致的耦合效應，以往這方面的研究亦有許多，說明如下。Schiffman[10]首先根據 Biot[8]壓密模式，再引用 Fourier 熱傳導定律與能量守恆定律，探討熱壓密問題；Booker 與 Savvidou[11-13]曾將熱流效應的影響加入 Biot[8]所建立之多孔介質壓密理論，推導出地層受點熱源、球體熱源以及異向性滲流情況下之多孔介質熱彈性力學問題的解析解 (Analytic Solution)；Amadei 等學者[14]曾探討橫向等向性岩層受應力作用時之閉合解；Aversa 和 Evangelista[15]則對 Neapolitan 地區的黃凝灰岩作過熱膨脹性質的探討；Al-Nimr 以及 Naji[16]曾說明沉積岩等具有橫向等向性之熱能傳輸現象；Lu 等人[17]則根據點熱源問題之基本解 (Fundamental Solution)，進一步推導出地層受線熱源作用之解。這些文獻之研究均有考慮熱能效應對地層力學行為變化的影響，可以這些相關研究成果為基礎，進一步探討溫泉抽水所引起地層力學行為變化等問題。

因係考慮深層之溫泉抽水問題，故地表邊界的影響可以忽略。基於此，本文將地層模擬一無線域情況，而地層之力

學性質、熱流性質與滲流性質等皆考慮為等向性 (Isotropy)。數學模式中，以點溫泉抽水源模擬溫泉抽水的現象；考慮溫泉地層飽和含溫泉水，且溫泉補注充分，使抽出的溫泉與補注的溫泉能保持平衡，以積分轉換方法 (Integral Transform) 研討出當溫泉抽水達穩態平衡時所引致的地層長期力學行為等之變化。所得出之結果可供作決策單位有依據的科學參考數據，避免不合時宜的溫泉開發規劃。因本文所研討出之解為可用簡單函數表示的穩態閉合解，故也可供許多數值分析專家們在應用數值分析軟體做複雜的計算之前，做數值結果之檢查及校正之用，本文之研究成果應具有極高之研究與應用價值。

三、數學模式

3.1 基本假設

本文所考慮點狀溫泉抽水問題的基本假設如下：

1. 考慮地層為均質之線彈性多孔介質，再將地層模擬為等向性情況。
2. 考慮穩態情況下，地層之長期力學、滲流與熱流行為變化。本文不考慮地層之暫態依時行為變化。
3. 孔隙水滲流符合 Darcy 定律。
4. 熱能之擴散傳輸僅考慮熱傳導現象，暫不考慮熱對流效應的影響。
5. 本文是考慮深層溫泉抽水，故模擬溫泉地層為一無線域，即不考慮地表邊界的影響。
6. 考慮溫泉抽水時，單位時間內所抽出之溫泉熱量與溫泉體積均保持定值。
7. 考慮在抽取溫泉時，地層不受礦物質所引致化學變化的影響。
8. 考慮地層中之溫泉含量豐富，抽取溫泉並不會造成溫泉枯竭情況。

3.2 介質位移、流體壓力與介質溫度變化量方程式

首先介紹問題之數學模式中的基本方程式。本文係擬探討如圖 1 所示之無限域溫泉地層點抽水所引起地層力學行為變化等問題。數學模式中係引用多孔介質熱彈性力學理論 (Thermo-poroelasticity) 建立基本方程式，茲以微小之代表性元素體 (Representative Elementary Volume) 的觀念分析孔隙水地層之力平衡、質量守恆與能量守恆等方程式，且考慮元素中之固體介質和孔隙流體具有相同的溫度。其主要研究對象為固體部分所組成的多孔介質、流經孔隙之流體以及熱能之擴散傳輸現象。多孔孔隙地層在受外力作用、流體流動或熱能流動時，都會造成孔隙地層之各項物理量產生變化，例如其體積、應力、溫度、超額孔隙水壓等均會產生變化。在點狀溫泉抽水作用情況下，若讓座標 z 軸通過抽水點，則問題可考慮為軸對稱。當孔隙地層之應變量很小時，則多孔孔隙地層之應變 ε_{ij} ($i, j = r, \theta, z$) 和位移 u_i ($i = r, \theta, z$) 的線性關係式，可以軸對稱圓柱座標 (r, z) 表示為：

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad (1)$$

因問題為軸對稱，故並不會產生環向位移量 u_θ ，亦即 $u_\theta = 0$ 。令作用於溫泉地層之總應力 (Total Stress) 為 τ_{ij} (壓力為正)、作用於固體介質之有效應力 (Effective Stress) 為 σ'_{ij} (壓力為正)、超額孔隙水壓力為 p (壓力為正)、溫泉

地層之溫度變化量為 ϑ ，再根據 Terzaghi[7] 的有效應力觀念 $\tau_{ij} = \sigma'_{ij} + p\delta_{ij}$ (δ_{ij} 為 Kronecker delta)，則：

$$\tau_{rr} = (\lambda + 2G)\varepsilon_r + \lambda(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) - (2G + 3\lambda)\alpha_r\vartheta + p, \quad (2a)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \lambda\varepsilon_r + (\lambda + 2G)\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda\varepsilon_{zz} - (2G + 3\lambda)\alpha_r\vartheta + p, \quad (2b)$$

$$\tau_{zz} = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_{\theta\theta}) + (\lambda + 2G)\varepsilon_{zz} - (2G + 3\lambda)\alpha_r\vartheta + p, \quad (2c)$$

$$\tau_{rz} = 2G\varepsilon_{rz}, \quad (2d)$$

其中 $\lambda = 2G\nu/(1-2\nu)$ 是等向性溫泉地層之 Lamé 常數， ν 係等向性溫泉地層之柏松比 (Poisson's Ratio)； $G = E/2(1+\nu)$ 為等向性溫泉地層之剪力模數 (Shear Modulus)， E 是等向性溫泉地層之楊氏係數 (Young's Modulus)； α_r 則為等向性溫泉地層中之固體介質的線性熱膨脹係數 (Linear Thermal Expansion Coefficient)。

作用於溫泉地層之總應力需滿足力平衡方程式 $\tau_{rj,j} + f_r = 0$ ，在軸對稱情況下，力平衡方程式可表為：

$$\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + f_r = 0, \quad (3a)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + f_z = 0. \quad (3b)$$

若不考慮微體力 (Body Force) f_i 的影響，先將式(1)代入式(2a)-(2d)，再將式(2a)-(2d)代入力平衡方程式(3a)與式(3b)中，則軸對稱多孔介質熱彈性力學問題之基本方程式可以溫泉地層之位移量 u_r 、溫泉地層之溫度變化量 ϑ 和超額孔隙水壓 p 等表為：

$$GV^2 u_r + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} - G \frac{u_r}{r^2} - \frac{2G(1+\nu)\alpha_r}{1-2\nu} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (4a)$$

$$GV^2 u_z + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{2G(1+\nu)\alpha_r}{1-2\nu} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (4b)$$

其中微分運算子 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ；溫泉地層之體積應

變量 ε 可表為 $\varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$ 。

3.3 流量連續方程式和熱平衡方程式

本文是將均質之溫泉地層模擬為等向性的線彈性多孔介質，其中孔隙流體的流動和熱能之擴散傳輸等需分別符合質量守恆和能量守恆定律，如以下所示：

$$-\nabla \cdot [n(v_w - v_s)] + q_w = 0, \quad (5a)$$

$$-\nabla \cdot h_s + q_h = 0, \quad (5b)$$

其中 v_w 與 v_s 分別為流體與固體之位移速度； h_s 係熱流率 (Heat Flux)； n 是多孔介質之孔隙率 (Porosity)； q_w 與 q_h 分別為自溫泉地層中抽水時的水體積與熱能。因係考慮溫泉抽水，且泉水中會含有熱能，故需同時考慮 q_w 與 q_h 的影響。

溫泉地層中孔隙水的流動需滿足 Darcy 定律，溫泉地層中之熱傳導現象需滿足 Fourier 定律，亦即：

$$n(v_w - v_s)_r = -\frac{k}{\gamma_w} \left(\frac{\partial p}{\partial r} i_r + \frac{\partial p}{\partial z} i_z \right), \quad (6a)$$

$$h_s = -\lambda_s \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} i_r + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} i_z \right), \quad (6b)$$

式中 k 與 λ_s 分別為等向性溫泉地層之滲透係數 (Permeability) 與熱傳導係數 (Conductivity)； γ_w 是溫泉水之單位重 (Unit Weight)。

將方程式(6a)、(6b)分別代入式(5a)、(5b)，並考慮單位時間內有 Q_w 體積之溫泉水被抽出，且其中包含 Q_h 焦耳的熱能，則可推得另兩個基本控制方程式如下：

$$\frac{k}{\gamma_w} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) + \frac{Q_w}{2\pi r} \delta(r) \delta(z) = 0, \quad (7a)$$

$$\lambda_s \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) + \frac{Q_h}{2\pi r} \delta(r) \delta(z) = 0. \quad (7b)$$

式中 $\delta(x)$ 是 Dirac delta 函數。式(4a)、(4b)、(7a)與(7b)組成問題之基本方程式，或稱之為控制方程式。

3.4 初始條件與邊界條件

本文是考慮問題之各項初始條件均為零。因係探討深層之溫泉抽水，故可不考慮地表邊界的影響，所以將溫泉地層模擬為無限域多孔介質。本文旨在探討溫泉地層因溫泉抽水作用所引致之地層長期力學、滲流與熱流等行為的變化，所以數學模式中之時間變數 t 均已考慮為 $t \rightarrow \infty$ 。

在 $z \rightarrow \pm\infty$ 之無限遠邊界位置上，可考慮其地層位移變化量、超額孔隙水壓及地層溫度變化量等均不受溫泉抽水的影響。因此，在無限遠邊界上之邊界條件可表為：

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \{u_r(r, z), u_z(r, z), p(r, z), \vartheta(r, z)\} \rightarrow 0. \quad (8)$$

四、積分轉換解析

本文係引用積分轉換方法解析如圖 1 所示點溫泉抽水問題之數學模式，所採用的解析方法為 Hankel 積分轉換方法，推導出無限域溫泉地層受點溫泉抽水作用所引致之地層力學行為變化等之穩態閉合解。首先對控制方程式(4a)、(4b)、(7a)、(7b)中之變數 r 分別作階、零階、零階與零階之 Hankel 積分轉換，可得：

$$-2\eta\xi^2 U_r + \frac{d^2 U_r}{dz^2} - (2\eta - 1)\xi \frac{dU_r}{dz} + 2(3\eta - 2)\alpha_r \xi \vartheta - \frac{1}{G} \xi P = 0, \quad (9a)$$

$$(2\eta - 1)\xi \frac{dU_z}{dz} - \xi^2 U_z + 2\eta \frac{d^2 U_z}{dz^2} - 2(3\eta - 2)\alpha_r \frac{d\vartheta}{dz} + \frac{1}{G} \frac{dP}{dz} = 0, \quad (9b)$$

$$\frac{k}{\gamma_w} \left(-\xi^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) P + \frac{Q_w}{2\pi} \delta(z) = 0, \quad (9c)$$

$$\lambda_s \left(-\xi^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \vartheta + \frac{Q_h}{2\pi} \delta(z) = 0, \quad (9d)$$

式中參數 $\eta = (1-\nu)/(1-2\nu)$ ；函數 U_r 、 U_z 、 P 、 ϑ 分別定義為：

$$U_r(z; \xi) = \int_0^{\infty} r u_r(r, z) J_1(\xi r) dr, \quad (10a)$$

$$U_z(z; \xi) = \int_0^{\infty} r u_z(r, z) J_0(\xi r) dr, \quad (10b)$$

$$P(z; \xi) = \int_0^{\infty} r p(r, z) J_0(\xi r) dr, \quad (10c)$$

$$\vartheta(z; \xi) = \int_0^{\infty} r \vartheta(r, z) J_0(\xi r) dr. \quad (10d)$$

上式之 Hankel 反轉換則定義為：

$$u_r(r, z) = \int_0^{\infty} \xi U_r(z; \xi) J_1(\xi r) d\xi, \quad (11a)$$

$$u_z(r, z) = \int_0^{\infty} \xi U_z(z; \xi) J_0(\xi r) d\xi, \quad (11b)$$

$$p(r, z) = \int_0^{\infty} \xi P(z; \xi) J_0(\xi r) d\xi, \quad (11c)$$

$$\vartheta(r, z) = \int_0^{\infty} \xi \vartheta(z; \xi) J_0(\xi r) d\xi. \quad (11d)$$

同理，式(8)所示之邊界條件亦需進行 Hankel 積分轉換，其結果為：

$$\lim_{z \rightarrow \pm \infty} U_r(z; \xi) \rightarrow 0, \quad (12a)$$

$$\lim_{z \rightarrow \pm \infty} U_z(z; \xi) \rightarrow 0, \quad (12b)$$

$$\lim_{z \rightarrow \pm \infty} P(z; \xi) \rightarrow 0, \quad (12c)$$

$$\lim_{z \rightarrow \pm \infty} \vartheta(z; \xi) \rightarrow 0. \quad (12d)$$

式(9a)-(9d)係聯立之非齊性常微分方程式 (Non-homogeneous Ordinary Differential Equation)，可利用解這類微分方程式的標準方法推求其通解 (General Solution)。經解析後，式(9a)-(9d)之通解如以下所示：

$$U_r = (A_1 + A_2 z) e^{z^2} + (A_3 + A_4 z) e^{-z^2} - \frac{1}{16\pi\eta} \left[\frac{2(3\eta-2)\alpha_s Q_w}{\lambda_s} + \frac{\gamma_w Q_w}{kG} \right] \left[\frac{|z|}{\xi} + \frac{1}{\xi^2} \right] e^{-\xi|z|}, \quad (13a)$$

$$U_z = \left[-A_1 + \frac{2\eta+1}{2\eta-1} \frac{1}{\xi} A_2 + \frac{2(3\eta-2)\alpha_s}{2\eta-1} \frac{1}{\xi} A_3 + \frac{1}{(2\eta-1)G} \frac{1}{\xi} A_4 \right] e^{z^2} - A_2 z e^{-z^2} + \left[A_5 + \frac{2\eta+1}{2\eta-1} \frac{1}{\xi} A_6 - \frac{2(3\eta-2)\alpha_s}{2\eta-1} \frac{1}{\xi} A_3 - \frac{1}{(2\eta-1)G} \frac{1}{\xi} A_4 \right] e^{-z^2} + A_6 z e^{-z^2} - \frac{1}{16\pi\eta} \left[\frac{2(3\eta-2)\alpha_s Q_w}{\lambda_s} + \frac{\gamma_w Q_w}{kG} \right] \frac{z}{\xi} e^{-\xi|z|}, \quad (13b)$$

$$P = A_4 e^{z^2} + A_8 e^{-z^2} - \frac{\gamma_w Q_w}{4\pi k} \frac{1}{\xi} e^{-\xi|z|}, \quad (13c)$$

$$\vartheta = A_5 e^{z^2} + A_7 e^{-z^2} - \frac{Q_w}{4\pi \lambda_s} \frac{1}{\xi} e^{-\xi|z|}. \quad (13d)$$

將式(13a)-(13d)代入邊界條件方程式(12a)-(12d)，即可求出式(13a)-(13d)中之係數 $A_i (i=1, \dots, 8)$ 。經整理後，式(13a)-(13d)可進一步改寫為：

$$U_r = -\frac{1}{16\pi\eta} \left[\frac{2(3\eta-2)\alpha_s Q_w}{\lambda_s} + \frac{\gamma_w Q_w}{kG} \right] \left[\frac{|z|}{\xi} + \frac{1}{\xi^2} \right] e^{-\xi|z|}, \quad (14a)$$

$$U_z = -\frac{1}{16\pi\eta} \left[\frac{2(3\eta-2)\alpha_s Q_w}{\lambda_s} + \frac{\gamma_w Q_w}{kG} \right] \frac{z}{\xi} e^{-\xi|z|}, \quad (14b)$$

$$P = -\frac{\gamma_w Q_w}{4\pi k} \frac{1}{\xi} e^{-\xi|z|}, \quad (14c)$$

$$\vartheta = -\frac{Q_w}{4\pi \lambda_s} \frac{1}{\xi} e^{-\xi|z|}. \quad (14d)$$

最後再引用式(11a)-(11d)及數學使用手冊[18]，進行 Hankel 積分反轉換，即可推導出溫泉地層受點狀溫泉抽水作用所引致之溫泉地層的水平位移暨垂直位移、超額孔隙水壓及地層溫度變化量等之穩態閉合解，如以下所示：

$$u_r(r, z) = -\frac{(1-2\nu)\gamma_w Q_w}{16\pi(1-\nu)Gk} \frac{r}{R} - \frac{(1+\nu)\alpha_s Q_w}{8\pi(1-\nu)\lambda_s} \frac{r}{R}, \quad (15a)$$

$$u_z(r, z) = -\frac{(1-2\nu)\gamma_w Q_w}{16\pi(1-\nu)Gk} \frac{z}{R} - \frac{(1+\nu)\alpha_s Q_w}{8\pi(1-\nu)\lambda_s} \frac{z}{R}, \quad (15b)$$

$$p(r, z) = -\frac{\gamma_w Q_w}{4\pi k} \frac{1}{R}, \quad (15c)$$

$$\vartheta(r, z) = -\frac{Q_w}{4\pi \lambda_s} \frac{1}{R}, \quad (15d)$$

式中符號 $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ 。式(15a)與式(15b)係因深層單點溫泉抽水所引致之地層水平位移與垂直位移變化等；式(15c)與式(15d)為問題所引起的地層超額孔隙水壓與地層溫度變化量。

五、結語

本文研究成果說明如下：

1. 本文係以積分轉換方法解析深層點溫泉抽水問題之數學模式，所研討出之解為可以簡單函數表達之閉合解。應用此閉合解，可進行後續之地層力學行為變化等之探討，許多數值分析結果之驗證與校正，均有賴於以此閉合解為基礎。
2. 本文係考慮單位時間(秒)內有 Q_w 熱量(焦耳)伴隨 Q_w 體積 (m^3) 之溫泉自深層地層中被抽出時，因溫泉抽水所引致之地層水平位移 u_r 、地層垂直位移 u_z 、超額孔隙水壓 p 、和地層溫度變化量 ϑ 等，如式(15a)-(15d)所示。

誌謝

本文係在國科會計畫 NSC-93-2625-Z-216-001 補助下所完成，特此申謝。

參考文獻

- [1] 陳昭旭、游政彥,「台灣溫泉資源之概述」,九十三年度農業工程研討會論文集,第 218-229 頁(2004)。
- [2] 經濟部水利署,「溫泉標準」,中華民國 94 年 7 月 22 日經濟部經水字第 09404605610 號令(2005)。
- [3] 吳詩晴、譚義績,「由線型構造推判大屯山溫泉區溫泉分佈及地下水補注概況」,九十三年度農業工程研討會論文集,第 192-203 頁(2004)。
- [4] 陳肇夏,「台灣溫泉成因與地熱探勘之我見」,地質,第 1 卷,第 2 期,第 107-117 頁(1975)。
- [5] 呂志宗,「溫泉抽水引致的橫向等向性地層沉陷之理論解析」,中華民國第二十八屆全國力學會議論文集,第 963-970 頁(2004)。
- [6] 呂志宗,「溫泉抽水引致之地層下陷理論解析」,九十三年度農業工程研討會論文集,第 105-116 頁(2004)。
- [7] Terzaghi, K., *Theoretical Soil Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, pp. 256-296 (1943).
- [8] Biot, M.A., "General theory of three-dimensional consolidation," *J. Appl. Phys.*, Vol. 12, No. 2, pp. 155-164 (1941).
- [9] Biot, M.A., "Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid," *J. Appl. Phys.*, Vol. 26, pp. 182-185 (1955).
- [10] Schiffman, R.L., "A thermoelastic theory of consolidation," *Environmental and Geophysical Heat Transfer*, C.J. Cremers, et al.,(eds.), ASME, Vol.4, New York, pp.78-84 (1971).
- [11] Booker, J.R., and Savvidou, C., "Consolidation around a spherical heat source." *Int. J. Solids Structures*, Vol. 20, pp. 1079-1090 (1984).
- [12] Booker, J.R., and Savvidou, C., "Consolidation around a point heat source," *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 9, pp. 173-184 (1985).
- [13] Savvidou, C., and Booker, J.R., "Consolidation around a heat source buried deep in a porous thermoelastic medium with anisotropic flow properties," *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 13, No. 1, pp. 75-90 (1989).
- [14] Amadei, B., Savage, W.Z., and Swolfs, H.S., "Gravitational stresses in anisotropic rock masses," *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech.*, Vol. 24, pp. 293-312 (1987).
- [15] Aversa, S., and Evangelista, A., "Thermal expansion of Neapolitan yellow tuff," *Rock Mech. Rock Engng.*, Vol. 26, pp. 281-306 (1993).
- [16] Al-Nimr, M., and Naji, M., "The hyperbolic heat conduction equation in an anisotropic material," *Heat and Mass Transfer*, Vol. 35, pp. 493-497 (1999).
- [17] Lu, J. C.-C., Chiu, W.-C., and Lin, F.-T., "Analysis of a buried deep point/line heat source in a cross-anisotropic porous elastic medium," *Proceedings of the 8th Conference of Advanced Technology Council in Mathematics*, pp. 162-171 (2003).
- [18] Abramowitz, M., and Stegun, I.A., *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover Publications, Inc., New York, 1046p (1970).

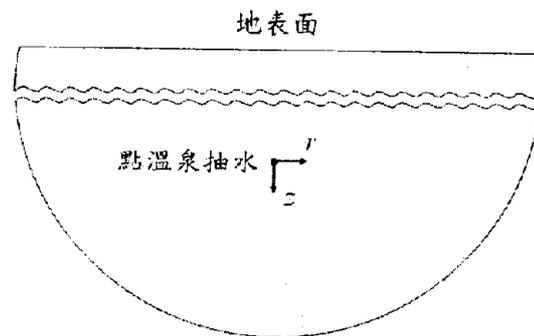


圖 1 深層點溫泉抽水問題示意圖

以下論文已發表，論文基本資料如下：

呂志宗、謝瑜萱，2005/9/8-10，「以黃金比例促進生態工程之教學設計探討」，第十一屆大地工程研討會論文集，第 I10-1~I10-8 頁。(本文係在國科會研究計畫 NSC93-2625-Z-216-001 補助下所完成。)

以黃金比例促進生態工程之教學設計探討

呂志宗¹ 謝瑜萱²

摘 要

本文嘗試由有趣的黃金比例切入美學，且略微引入信仰的層面，使執行生態工法的工程師將生態保育的觀念提升至信仰的層面，懂得欣賞造物主所創造的自然生態之美，而能在工程進行的過程中，維護生態景觀，減少或避免生態景觀的破壞，甚至能夠恢復已被破壞的生態環境。本文之介紹，能讓讀者對黃金比例等有更深入的認識，並可使相關人員在推行生態工法時，有天人物我、人與自然應共存共榮的胸懷。

關鍵詞：黃金比例、生態工程、費氏數列、多媒體教學。

THE IMPROVEMENT OF TEACHING DESIGN ON ECOLOGICAL ENGINEERING WITH THE HELP OF GOLDEN RATIO

John C.-C. Lu Yu-Hsuan Hsieh

ABSTRACT

The paper tried to introduce the interesting concept of golden ratio to improve teaching of design on ecological engineering. The ecological protection is an important issue for engineers. The golden ratio frequently appeared in the nature, and the admiration of the nature help engineers to protect the creation in engineering construction. Human usually think that there is a Creator for nature. The study presents the esthetics of golden ratio to the faith level to help engineers building up the mind of coordination of nature, human, matter and oneself.

Key Words: Golden Ratio, Ecological Engineering, Fibonacci Series, Multimedia Teaching.

一、前言

生態工法係兼顧自然生態的工程方法，執行生態工法的工程人員除應具備工程學上暨生態學上之專業能力以外，也應具備美學的素養。羅家倫曾說，德、智、體、群、美這五育應均衡發展。在探究生態工程的精神與內涵時，可發現這不僅是工程技術層面的問題，甚至是心態的問題。

生態工程教育之內容應包括天人物我這四個層面，若欲培養一個工程師具有這種天人物我的胸懷，則授課老師不僅應教授其技術層面之知識技能，也應教授學生如何以虔敬的態度面對天、如何與他人團隊合作、如何愛護環境生態中之每一個活物、以及該如何以積極態度面對自己的生命問題。以上所述問題之層面，不僅是知識技能的層面而已，也是一種生活的態度，不僅屬於哲學的層次，更與信仰的層次相關。

老實說，若以說教的古板方式介紹這些層面的問題，大部分的讀者大概都會覺得興趣缺缺，即使說得頭頭是道，也提不起勁來看個仔細，因為這類的主題通常是既八股又說教的，且身教又重於言教，不是說一個人口才好能講得出來就算可以的了。筆者覺得，欲突破此一困境，可以從「美」這個字出發，進一步介紹自然界中的黃金比例之「美」。也可

以從「美」這個字的甲骨文寫法，瞭解造字的倉頡等人所企望的人事物之「美」，其意境與造物主有關，是一種祈求「天人合一」之「美」的信仰。

美學素養的提升可從許多方面著手，筆者擬嘗試由有趣的黃金比例切入美學，且略微引入信仰的層面，使執行生態工法的工程師將生態保育的觀念提升至信仰的層面，懂得欣賞造物主所創造的自然生態之美，而能在工程進行的過程中，維護生態景觀，減少或避免生態景觀的破壞，甚至能夠恢復已被破壞的生態環境。

自然界中存在著許多有趣的黃金比例現象，有一些是以線的方式呈現、有些是以面的方式呈現、有些則是以立體的方式呈現。除空間問題與黃金比例有關之外，很多與時間有關的問題也與黃金比例有關。黃金比例可由費波納西(Fibonacci)數列推導出，引用費氏數列，即可尋找出黃金比例 0.618，許多有趣的生命現象，都可引用黃金比例或費氏數列加以解釋。

費氏數列係指{1、1、2、3、5、8、13、21、34、55、89、144、233、...}，此數列之特徵為數列當中任意三個連續的數字之前兩個數字相加的和，恰為第三個數字的大小。例如，5、8、13 這三個連續的數字中之第三個數字 13 恰好

1. 中華大學土木與工程資訊學系副教授

2. 中華大學土木與工程資訊學系碩士班研究生

是前兩個數字 5 與 8 之和。引用費氏數列，並安排前後相鄰的兩個數字彼此相除，則所得出的比值會逐漸趨近於 0.618，其倒數則為 1.618，0.618 或 1.618 均被稱之為黃金比例、黃金比值或黃金數，後面單元會詳述其推導過程。這個比值讓大自然當中的許多事物，都能呈現出完美的組合。

二、美之內涵

聖經創世記二章九節說：「耶和華神使各樣的樹從地裏長出來，可以悅人的眼目，也好作食物。」這段經文給我們看見，植物有兩種功用，一是給人欣賞，二是供應人類所需用的食物，且造物主認為「悅人眼目」應排在「好作食物」之前。回想我們的生活經歷，也可以揣摩出這一段很有哲理的話，眾人應會同意植物在景觀上的功能是很重要的說法。站立在一片向日葵花田中或是一片油菜花田中的感覺，實在是一種既幸福又美好的深刻感受。

造物主實在是最懂得「美」的藝術家，當我們觀賞祂廣大的創造時發現，自然界中的形形色色，實在是壯麗奇觀又美妙，大大小小，說出祂的無限，令人不禁要立即發出讚美的聲音。譬如，自古以來，絕對沒有兩片雪花是完全相同的；人體上的各個器官，都是既精巧又美麗，功能完善、大小相符且被安排在最恰當的位置上。自然景觀的設計欣賞牽涉到美學，但是美學的應用並非僅侷限於自然景觀而已。實際上，各行各業的專家，都可以給「美」這個字適當的詮釋。例如：寫文章的人會說，文章之表達若能詞意通順、文辭並茂、精采動人，這就是「美」，也有詩人說「數大就是美」；作畫的畫家大概會說，一幅畫若能融入畫家的感情，再輔以繪畫的技巧，並能感動欣賞者，即可稱得上是「美」的作品；各種服務人群的行業會說，若能讓每一位被服務的顧客稱心滿意，有賓至如歸及被人尊重的感覺，這就是「美」。各行各業對「美」所下的定義，通常已超越視覺感官的範圍，並且均已達到心靈的層次。由此可知，若要對「美」下個定義，單從視覺感官的角度加以解釋是不夠的。因此，本單元除了將從黃金比例說明「美」的概念，亦將探討心靈層次的「美」。

作者發現造漢字的倉頡等人很有智慧。漢字之演變，依時間的先後，有甲骨文、金文、大篆、小篆、隸書和草書等，而根據考古學家的鑑定，甲骨文最早出現的年代大約已有 4,600 年左右的時間[1]，而聖經創世記中的挪亞一家八口出方舟的時間也已約有 4,600 多年，因此甲骨文開始出現的時間，大約就是挪亞一家出方舟的時間。有相信聖經的文字學家[1、2]推論說，根據聖經，大洪水後，人類是因蓋造巴別塔，被神分散至地的四方，故在 4,600 年前那個古老的年代裏，寫聖經的希伯來人遷移至中東附近，自稱是炎黃子孫的華夏民族則向東遷移，居住在亞洲東邊，並稱自己所居住的這塊土地為「神州」，意思是我們的先祖認為自己是神的子民，而所居住的這塊土地是神給的土地。希伯來人與造漢字的倉頡等人，一定會從他們先祖的口中得知，人類的第一個家庭是神所造的亞當、夏娃，以及亞當、夏娃喫了知識樹上的果子後，被趕出伊甸園的故事。自此之後，人類經歷了四次的墮落，且一次比一次嚴重，但神不放棄人，應許要救贖被敗壞的人，當時神應許給人的救贖主耶穌基督尚未來到地上，但神卻以豫言或圖畫的方式將祂的心意啓示給人[3、4]。

神啓示希伯來人的話，就記載在希伯來聖經中；而神啓示給神州子民的話，有一部分就隱藏在我們現今所使用的漢字中[1、2]。因為惟有引用聖經上的神聖啓示，才有辦法解釋甲骨上所出現的文字之符號裏頭所要表達的豫意。引用聖經中所記載的故事或神聖的啓示，應可說明為何造漢字的倉頡等人，會造出一個有「舟」、有「八」又有「口」的「船」字，原來是用以表示挪亞一家八口住在巨大的方舟內，用以躲避全球性的大洪水這件事；此外，又造出我獻羔羊、羔羊蓋我的「義」字，這個「義」字的上半部是一隻「羊」，而

下半部則是一個「我」字，這也微妙微肖的將整本聖經的精意「我獻羔羊、羔羊蓋我」給啓示出來了。在漢字當中，有很多跟「羊」有關的字，都有正面、積極、光明的象徵意義，例如：「義」、「祥」、「善」、「美」等字都是。

現在讓我們再來看看與本單元之主題有關的「美」字，「美」這個字是由「羊」與「大」所組成。在甲骨文中「羊」是畫成 ；「大」是畫成 ，乃指一個人；而「美」是畫成 。舊約聖經中有許多關於耶穌基督要來到地上為人類流贖罪的記載，在說到流血贖罪這件事時，神是以羊來形容祂自己，說耶穌是替罪的羔羊，如同舊約祭司在獻祭過程中，以羊為犧牲祭物一樣。在中國，最大的禮儀就是祭祀。有一次子貢想撤掉祭壇上的羊，但孔子對他說：「爾愛其羊，我愛其禮。」可見在古老的中國傳統裏，對祭祀的禮儀，是相當堅持的，因其在豫表上相當重要。若以此精神來解釋「美」這個字，就能夠很清楚的說明為何「羊」加上「大」就是「美」，當時造字的人應是在描述一幅圖畫，指明將來神的羔羊要為人捨命流血贖罪這件「美」事。

對耶穌基督的信徒而言，應能領會如何過「美」的人生，不就是接受主耶穌為個人流血贖罪，並經歷祂的死與復活。聖經羅馬書六章五節說：「我們若在祂死的樣式裏與祂聯合生長，也必要在祂復活的樣式裏與祂聯合生長。」這樣的與主耶穌同死同活，會使我們裏面滿有羔羊基督的生命，這應就是「美」這個字的屬靈意義之實際。

黃金比例或費氏數列都可用以描述完美的事物，它可以使人們對完美事物的解釋，不再只是侷限於抽象之定性的描述，而能以定量的數據加以表明。造物主確實也在許多的受造之物身上，引用了黃金比例或費氏數列的設計原則。以下之介紹，能讓讀者對黃金比例等有更深入的認識，並可使相關人員在推行生態工法時，有天人物我、人與自然應共存共榮的胸懷。

三、黃金比例的推導

學理上，推導黃金比例的方法有很多種，例如可以：1. 根據費氏數列；2. 根據完美的相似矩形；3. 根據比例中項的原則；4. 根據正五邊形；5. 根據帕司卡(Pascal)三角形[5-8]。今擬介紹如何根據費氏數列推導出黃金比例。

費氏約出生於 1170 年，後來成為商人，也是一位出色的數學家。1202 年，他寫了一本名為「計算書」的數學書，在書中他曾提出一個著名的「兔子問題」，亦即：「某人在圍牆內飼養了一對兔子，如果它們每個月生出一對兔子，且新生的兔子在第二個月後也是每個月生出一對兔子，請問一年後圍牆內一共有多少對兔子？」

根據題意，第一個月圍牆內所出現的兔子，就是飼養者原先所飼養的第一對兔子，故第一個月時圍牆內僅有一對兔子，茲將第一對兔子編為 ① 號。

第二個月時，第一對兔子還不能生出兔子，因為每一對兔子都必須在成長兩個月以後才能生出兔子，故第二個月時，圍牆內的兔子仍是一開始飼養的那一對編號為 ① 號的兔子。

根據題意，第三個月時，第一對兔子已成長兩個月了，故應會生出一對兔寶寶，茲將所生出一對兔子編號為 ② 號。故現在圍牆內，應該已經有兩對兔子了。

第四個月時，編號為 ② 號的那一對兔子還不能生出兔寶寶，因新生的兔子要成長兩個月之後，才會生出後嗣，但編號為 ① 號的那對兔子會繼續生出一對兔寶寶，茲將這個月新出生的一對兔寶寶編為 第 ③ 號，故第四個月時，圍牆內已出現三對兔子了。

第五個月時，編為 ③ 號的這一對兔寶寶還不能生後代，但編號為 ② 號的那一對兔子已經成長兩個月了，故編號為 ④

號與②號的那兩對兔子會分別生出一對兔寶寶，茲將新出生的兩對兔寶寶分別編為第④號與第⑤號。因此第五個月時，圍牆內已出現五對兔子了。

第六個月時，編號為①號與②號的兔寶寶還不能生出後代，但編號為③號的那一對兔子已經成長兩個月了，故編號為④號、⑤號與⑥號的那三對兔子會分別生出一對兔寶寶，茲將新出生的三對兔寶寶編為第⑦號、第⑧號與第⑨號。因此第六個月時，圍牆內已出現八對兔子了。

同理，第七個月時，編為第⑥號、第⑦號與第⑧號的兔寶寶還不能生後代，但第五個月出生，編號為第④號與第⑤號的那兩對兔子已經成長兩個月了，故編號為第⑩號與第⑪號的這兩對兔子，連同編號為①號、②號與③號的那三對兔子會分別生出一對兔寶寶，一共將新出生五對兔寶寶。因此，第七個月時，會新增五對兔寶寶，故圍牆內已出現十三對兔子了。依此類推，由第一個月開始，每個月圍牆內所出現的兔子對數，可列表如下所示。

表 1 費氏所提兔子問題的解答

月份	第 1 月	第 2 月	第 3 月	第 4 月	第 5 月	第 6 月	第 7 月	第 8 月	第 9 月	第 10 月	第 11 月	第 12 月
兔子對數	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

由上表得知，經過 12 個月份之後，圍牆內一共會出現 144 對兔子。以上各個月份所出現的兔子對數，係形成一特殊數列，稱為費氏數列。基於此，費氏數列可表為： $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots\}$ 。其中的數字 144 係 12 的平方，它是費氏數列中唯一的平方數。第 12 個月所出現的數字是 12×12 ，這似乎是一種必然的巧合。這一連串數字，呈現出一種特殊的組合，亦即前兩個數字相加的和，正好是第三個數字的大小。例如，數字 2 是數字 1 與 1 的和，數字 3 是數字 1 與 2 的和，數字 5 是數字 2 與 3 的和，依此類推，即可找出組成費氏數列的所有成員，且這是一個無窮盡的級數。

引用費氏數列，即可找出黃金比例 0.618 或 1.618，說明如下。已知費氏數列可表為 $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, \dots\}$ ，其前後兩個數字相除，會逐漸得出 0.618 的比值，如表 2 所示。

表 2 根據費氏數列所得出之黃金比例

前兩項數字相除	比值	後兩項數字相除	比值
1/1	1.0000000000	34/55	0.6181818182
1/2	0.5000000000	55/89	0.6179775281
2/3	0.6666666667	89/144	0.6180555556
3/5	0.6000000000	144/233	0.6180257511
5/8	0.6250000000	233/377	0.6180371353
8/13	0.6153846154	377/610	0.6180327869
13/21	0.6190476190	610/987	0.6180344478
21/34	0.6176470588	987/1597	0.6180338134

表 2 中取小數點以下三個位數所出現的比值為 0.618，而其倒數則為 $1 \div 0.618 = 1.618$ 。習慣上，0.618 或 1.618 均可稱之為黃金比例或黃金分割，其小數點以下之數字並不會循環重複出現，這似乎是造物主在以另一種方式向人啓示祂的所是，表明：「祂乃是擁有無限豐富的那一位，神的愛長闊高深，且祂又是常新的神，絕不老舊等等。」

四、與黃金比例相關之例證

穹蒼宇宙中，關於黃金比例或費氏數列的相關例證或其應用等不勝枚舉。茲列舉數例，說明有趣的相關例證。

1. 鸚鵡螺的黃金螺旋線

取由小至大規律性排列組合的正方形，讓各個正方形之邊長分別為 1、1、2、3、5、8、13、21 等費氏數列之成員，然後以各個正方形四個角中之一角為圓心，繪製四分之一的圓弧曲線，再連接各個圓弧曲線，則所形成的螺旋線稱為黃金螺旋線。如圖 1 所示：

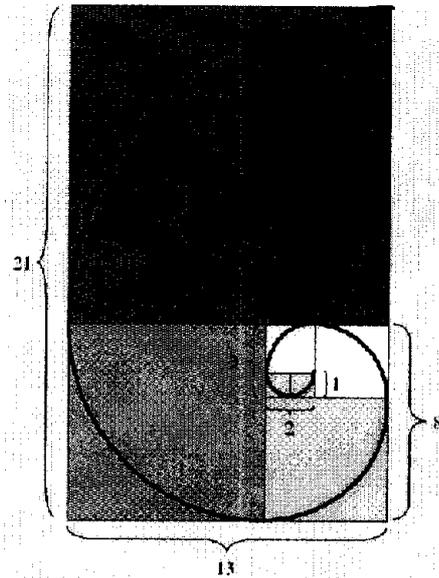


圖 1 根據費氏數列所繪製的黃金螺旋線

此一黃金螺旋線常出現於貝類，最明顯的例子是鸚鵡螺，如圖 2 所示。此外，在蝸牛、松果及葵花子的排列等自然界的其他生命現象裏，也可以發現黃金螺旋線的蹤跡，如圖 2 至圖 4 所示。



圖 2 鸚鵡螺的黃金螺旋線

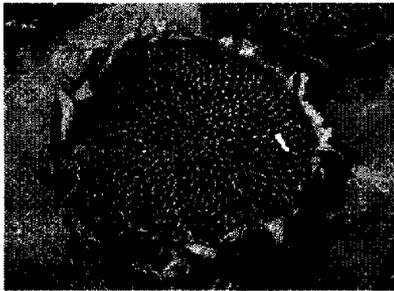


圖 3 葵花子的排列會出現黃金螺旋線



圖 4 蝸牛的殼也會出現黃金螺旋線

2. 蝴蝶與螞蟧的翅膀也具有黃金比例的現象

如圖 5 至圖 7 所示，蝴蝶與螞蟧之後翅與前翅張開時的寬度比或長度比，很接近黃金比例。台灣擁有蝴蝶王國的美譽，台灣最著名的蝴蝶應屬紫蝶，每一年它們都會成羣結隊來到茂林地區越冬。最近四年來，蝴蝶生態學家極欲瞭解紫蝶的遷移路徑「蝶道」，由去年標放的八萬隻紫蝶的遷移路徑之研究得知，「蝶道」應至少長達 150 公里。2004 年在茂林地區越冬的紫蝶數量高達上百萬隻，除研究人員再度造訪該地之外，也有許多關心蝴蝶生態的民眾想一窺究竟。大英博物館在 2003 年 6 月出版的「蝴蝶」一書中，曾將台灣的紫蝶幽谷與墨西哥的帝王斑蝶谷並列，由此可知，台灣的紫蝶幽谷係屬世界級的自然生態景觀。

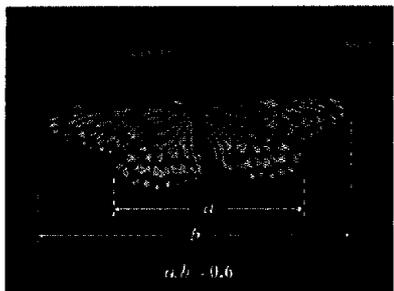


圖 5 大白斑蝶翅膀的前翅與後翅之寬度係呈黃金比例

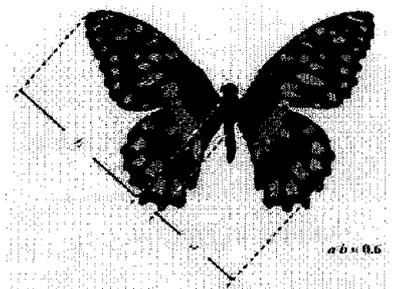


圖 6 無尾鳳蝶翅膀的前翅與後翅之比例係呈黃金比例

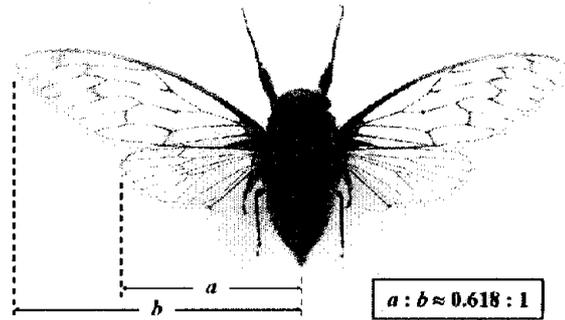


圖 7 螞蟧翅膀的前翅與後翅之比例亦呈黃金比例

3. 葉脈的生長方式有些即呈黃金比例

根據聖經創世記二章九節，受造的植物具有悅人眼目的功用。雖然我們並不清楚其他動物是否也像人類一樣，具有欣賞植物之美的能力，但人類應能肯定的說：「植物很美」，這是無庸置疑的。因此，在各種植物身上，應該也不難發現黃金比例的痕跡。由以下圖 8 與圖 9 得知，樹葉的葉脈分支即呈黃金比例現象。



圖 8 黃槿葉脈的分支明顯呈黃金比例現象



圖 9 重瓣朱槿的葉脈分支亦呈黃金比例

4. 螃蟹與蝦子之關節性附屬肢亦呈黃金比例

螃蟹與蝦子具有的共同特徵包括：(a)關節性附屬肢；(b)外骨骼；(c)二螯八足。根據這三項特徵，動物分類學家將牠們連同龍蝦與寄居蟹等，於分類時都同時將其歸屬於：節肢動物門、甲殼綱、十足目，因此螃蟹與蝦子又常被稱之為「甲殼十足類動物」。由圖 10 至圖 12 知，螃蟹與蝦子之關節性附屬肢亦呈黃金比例現象。

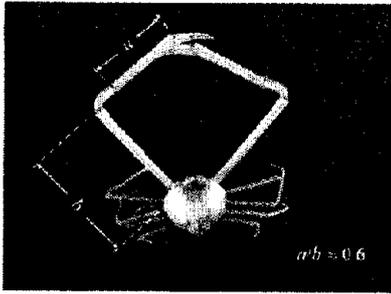


圖 10 螃蟹的關節性附屬肢常呈黃金比例

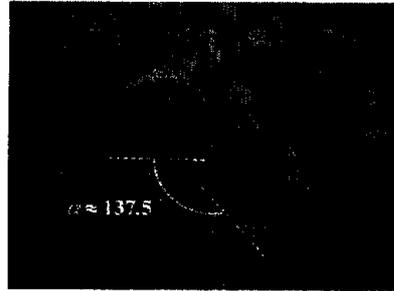


圖 14 郁李的葉片生長方式均呈黃金角度

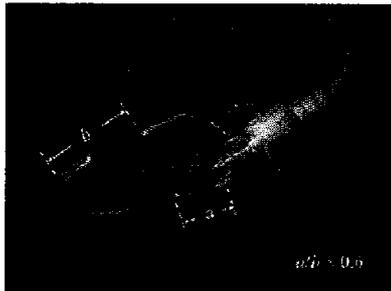


圖 11 蝦子的關節性附屬肢亦呈黃金比例



圖 15 豬籠草的葉片生長方式也呈黃金角度

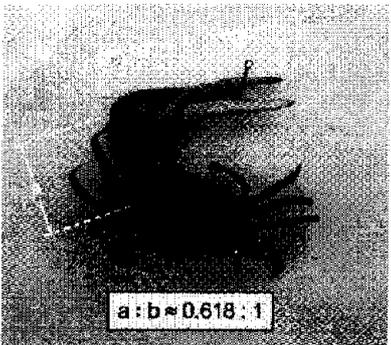


圖 12 台灣的弧邊招潮蟹的關節性附屬肢也呈黃金比例

5. 樹葉的生長角度有些呈黃金角度

在植物樹葉的生長上，可以看到黃金角度。360 度的 61.8% 是 222.48 度，其補角則是 137.52 度，222.48 度或其補角的 137.52 度均是圓形之黃金角度的描述。植物的葉片有數種生長方式，其中有一種生長方式可以用黃金角度加以解釋。如圖 13 至圖 15 所示，觀察小團扇蕨、郁李及豬籠草等的葉片生長方式發現，相鄰兩片葉子的生長角度係呈黃金角度。在植物學上，這應可解釋為此種生長方式可營造最佳之光合作用效率，且對空間之利用也較理想。製作扇子的專家也說，扇子展開後，所呈現最美造型之扇子的角度也很接近 137.52 度。

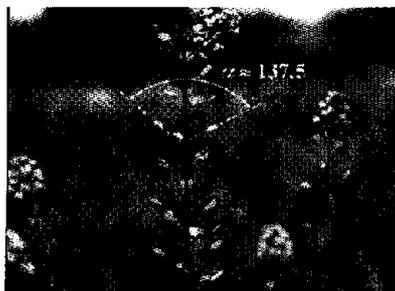


圖 13 小團扇蕨的葉片生長方式係呈黃金角度

6. 指骨亦可找到黃金比例

無論是人類或動物的身上，都隱藏著許多黃金比例的關係。例如，人體肚臍以上的身長與肚臍以下的身長之比例，很接近黃金比例。中醫理論認為，肚臍是人體中之關鍵穴位，因此很多病症的治療，都與肚臍的穴位有關。此外，人之手掌上的指骨有三段，而相鄰兩段指骨之長度的比例係呈黃金比例，如圖 16 所示，此一現象亦令人驚奇。

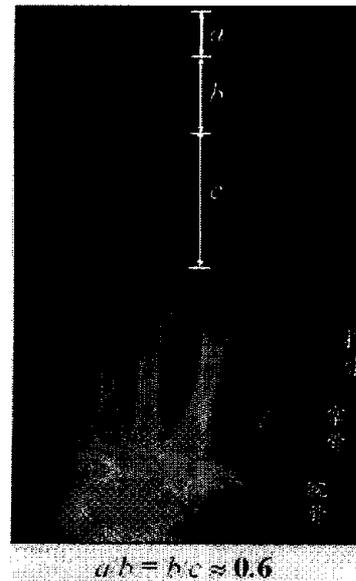


圖 16 人類手掌上的指骨呈黃金比例

7. 貓的眼睛位置亦可找到黃金比例

由圖 17 知，貓之眼睛係位於其頭部長度之黃金分割位置上。其實不僅貓有此一奇妙現象，人類及許多其他動物的眼睛很多也都位於頭部之黃金分割位置上。將靈魂之窗放在頭部之黃金分割位置，在造型設計上，是相當出色的，可見造物主真是一位擁有聰明智慧又有美感的藝術家。

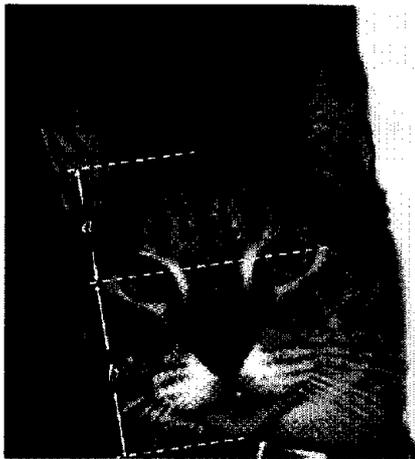


圖 17 貓的眼睛位置呈黃金比例

8. 世界最古老的都江堰水利工程也具有黃金比例的概念

都江堰水利工程已運作了兩千兩百六十年，被喻為當今之活的水利博物館。李冰父子整治岷江時，在岷江的江心以竹籠裝卵石，將岷江分為內外二江，使其兼俱洩洪與灌溉的功能。

由魚嘴分流堤、寶瓶口引流工程與飛沙堰溢洪道所組成的渠首工程，堪稱為都江堰之最關鍵工程。魚嘴職掌分水、寶瓶口負責引水、飛沙堰專司洩洪排沙，三者協調運作。分水魚嘴有「分四六、平潦旱」的功能。在枯水期，內江進水六成灌溉，外江洩水四成；在豐水期間，內江進水四成灌溉，外江洩水六成，以避免大水侵襲成都平原。這關鍵的「分四六」不就是黃金比例的概念嗎？圖 18 係翻拍自 2002 年 11 月 14 日的聯合報第 10 版。



圖 18 進行淘沙清淤的都江堰水利工程係以古法截流

9. 攝影師構圖時常將照片中之主角安排在黃金分割點上

如圖 19 所示，在攝影構圖時，可將畫面主角適當安排在畫面中之四個黃金分割點上。根據攝影師的經驗，在這種情況下，通常能呈現出較完美的畫面。另外，圖 19 中所示之櫻花的面積大小約佔全部影像面積之五分之二，且這兩張影像之寬度與長度的比例是 2:3，這也都算是黃金比例的應用。不知讀者是否心中也有同感，覺得將主角放在畫面之正中央偏一邊的構圖方式，畫面較出色。藝術作品中常見採用黃金比例的動態對稱(Dynamic Symmetry)原則，如達文西等許多著名的畫家，均曾在其畫作中採用動態對稱的原則。

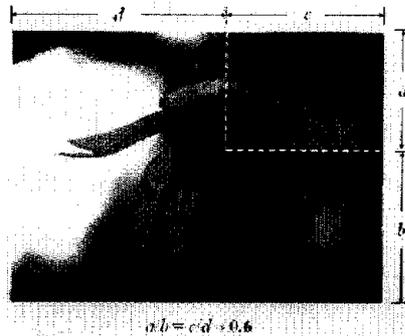


圖 19 在矩形畫面中一共會出現四個黃金分割點

10. 聖經中的方舟與約櫃也具有黃金比例的概念

出埃及記二十五章十節說到神見證的櫃，見證的櫃之寬度與高度是一肘半，長度則是二肘半，因此寬度或高度與長度的比例變化關係是 0.6；此外，方舟的寬度是五十肘，高度是三十肘(創世記六章 15 節)，其高度與寬度的比例也是 0.6，這些都是黃金比例的呈現。

英文的方舟與約櫃都是 Ark，也就是說，聖經裏有兩個 Ark—挪亞的方舟和神見證的櫃。三和五是神建造裏的基本數字，所以方舟的長是三百肘，寬是五十肘，高是三十肘。另外，神見證之櫃的尺寸是半數，亦即二肘半是五肘的一半，一肘半是三肘的一半。當人看到見證之櫃的量度都是半數時，就會立刻領悟到需要另一半。他們會知道這是一個見證，因為二見證的數字。方舟的量度乃是見證一個以三和五為基數的完整單位[4]。圖 20 是翻拍自和合版中文聖經之插圖。

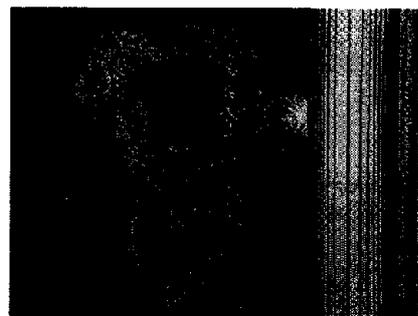


圖 20 約櫃之寬度或高度與長度的比例呈黃金比例

表 3 則為作者在生態工程之相關教學課程中，將黃金比例之美學訓練融入教學活動中所設計完成的教案，修課學生普遍都覺得此一授課方式活潑有趣，且有助於生態工法之應用與推廣。

五、生態工法

生態工法源起於歐洲，且在歐美及日本已有數十年的發展經驗，但生態工法在台灣之推動不過僅僅數年而已，只在起步階段，有許多迷思尚待破除，並需建立以下三點正確之觀念：1. 生態工法並非是絕對安全的。2. 生態工法並不是完全否定混凝土。3. 生態工法並不是萬靈丹。生態工法並非萬能的工法，在國內外也曾發生過失敗的案例，但這並不代表生態工法就是不好的工法。引用生態工法設計施工時，工程人員應該採用「因地制宜、就地取材」的原則，視當地環境情況再決定運用何種工法設計施工，以達到安全的目標。

表 3 根據黃金比例之美所撰寫的教案

活動單元	黃金比例之美	適用對象	大專學生	活動人數	40 人
活動主題	以黃金比例觀察大自然之美	活動地點	教室及校園花園	所需時間	100 分鐘
活動目標	介紹黃金比例及甲骨文中所表達的「美」之意境，並說明自然生態中與黃金比例相關之美。				
步驟		時間	執行人員	配合器材	
一、以有趣的方式呈現黃金比例 1. 事先挑選出十張左右之數位照片，並以影像處理軟體裁切照片之邊長，使邊長呈 1:5、2:5、3:5、4:5、5:5 等之比例變化，同時各自安裝數位相框，再以 PowerPoint 展示每一張照片，然後請同學們票選出自認為最美的照片。 2. 請各組同學之代表試著說出所作選擇的理由。 3. 由老師作歸納與整理，並說明同學們的選擇與黃金比例有關。		25 分鐘	授課教師	筆記型電腦、單鎗投影機	
二、由 Fibonacci 數列介紹黃金比例的由來 1. 事先挑出 30 張左右之花朵的數位照片，且每一朵花之花瓣數量都與 Fibonacci 數列有關，亦即花瓣數量需為 1、2、3、5、8、13、... 等等，再以 PowerPoint 展示每一張照片。 2. 介紹 Fibonacci 數列之組成方式，並據以推導出黃金比例 0.618。 3. 將符合 Fibonacci 數列的向日葵等花朵發給各組學生們，請學生們數一數每一朵花之花瓣數量，記錄並統計所得出之數據，用以印證 Fibonacci 數列與花瓣數量有關。		25 分鐘	授課教師	筆記型電腦、單鎗投影機及花卉一批	
三、將上課地點移至戶外之校園花園 1. 請同學們觀察花園中之植物，並指出有那一些生命現象是與黃金比例或 Fibonacci 數列有關。 2. 請同學們思考黃金比例或 Fibonacci 數列的應用方式，將其寫下來，並交給老師。		25 分鐘	授課教師及兩位助教		
四、由甲骨文介紹「美」之內涵 1. 說明甲骨文的由來，並以聖經解釋文字背後所隱藏的神聖啓示。 2. 請同學們思考人生如何經營、工程如何進行才會是「美」？		20 分鐘	授課教師	筆記型電腦、單鎗投影	
五、結語 以黃金比例或費氏數列確實可以解釋自然生態之美。敬畏「天」使我們能夠尊敬大自然，並瞭解自然界中之每一個活物都有其存在的意義跟價值，並願意在工程設計及施工的過程中，盡力加以保護。		5 分鐘	授課教師		

由 Bergen[9]所提出的生態工程設計原則包括以下幾點：1. 因地制宜。2. 維持所設計之各項功能需求之獨立性。3. 承認激發生態設計的價值與意義。傳統工程師被賦予的責任在於保護及服務社會，卻常將最重要的維護自然環境系統之原則摒除在外。引用生態工法之各項工程，無論結果為何，其設計都有它的意義與價值。工程建設於規劃設計階段，應有效整合該工程與鄰近環境之相關資源，並提供完善之規劃，以滿足安全、生態與景觀的需求。工程建設施工時，需避免破壞原有之自然景觀，並盡力維護自然環境系統原有之生命力。

六、河川生態工法教學網站之建構

以上各單元之介紹，旨在簡介黃金比例與生態工法，授課教師可以將具有學理基礎且活潑有趣之黃金美學，融入生態工程之相關教學內容，以提升生態工程之教學成效。為達到生態工程教育之教學宗旨，作者亦努力建構出網路化互動式多媒體教學系統，該系統是依據使用者為學習過程之核心

的設計理念所設計完成，應有助於生態工法之認識與推廣，並可強化數位學習之內容。本教材曾獲得遠東技術學院主辦、國科會及教育部指導之「九十二年度自製教學媒體競賽暨觀摩研習會」之「佳作獎」，並接受邀請公開展出，目前仍持續於網際網路 <http://www.isslp.mis.fec.edu.tw/fec/> 中公開發與其他作品聯合展出(2004.6.4-迄今)；此外，作者已向服務學校申請網頁空間放置該作品，讀者亦可由網址 <http://www.chu.edu.tw/~noahsark/> 中瀏覽該教材之所有內容。

本教材之製作軟體方面係以 Flash MX 作為動畫編輯平台，再以 Dreamweaver MX 做為網頁編輯平台，並以 Photoshop、PhotoImpact 等做為影像、圖片處理之介面工具，文字特效部分是以 Swishmax 做為編輯工具；再以 PhotoStitch 軟體製作 3D 之互動式影像，配合 Flash MX 中動作的設定完成 3D 環景；配音及配樂的部分是以 Sound Forge XP 做為編輯軟體；所需硬體部分則包括了 400 萬畫素數位相機、及 68 萬畫素數位攝影機等。

本教學系統所介紹的河溪整治案例，包括北台灣的基隆

友蚋溪、基隆河、台北新店溪、木柵萬壽溪、南港四分溪、松山虎山溪、內湖大溝溪、士林內厝溪與平菁街溪、北投貴子坑溪與水磨坑溪、新竹九芎湖溪、桃園龍潭南坑溪、以及苗栗新店溪永興段等共 14 個案例。各項工程之治理型態可分為下列七種：1. 北投貴子坑溪、北投水磨坑溪等地區—其治理型態為「治山防洪」。2. 苗栗獅潭鄉新店溪永興段等地區—其治理型態為「形成環境美化區」。3. 基隆友蚋溪等

地區—其治理型態為「維護原始生態」。4. 新竹新埔九芎湖溪等地區—其治理型態為「富麗農村」。5. 桃園龍潭南坑溪等地區—其治理型態為「使用多種護岸設計」。6. 南港四分溪、士林內厝溪等地區—其治理型態屬於「早期景觀野溪整治」。7. 士林平菁街溪、內湖大溝溪、木柵萬壽溪、松山虎山溪等地區—其治理型態屬於「近期景觀野溪整治工程」。所設計完成之多媒體教材的連結內容如圖 21 所示。

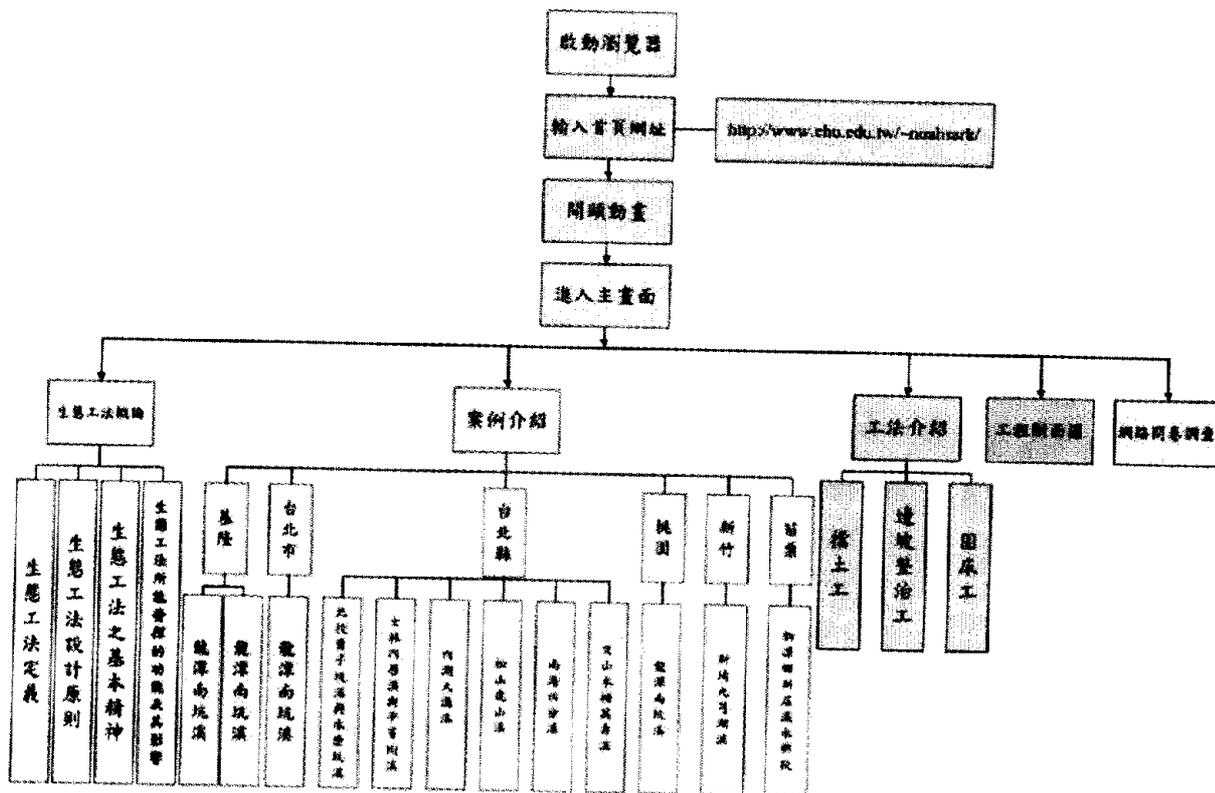


圖 21 河川生態工法教學網站教材連結內容

七、結語

本文旨在引用黃金比例、費氏數列和甲骨文上的「美」字，說明如何以黃金美學觀察大自然，以及古人如何在造字時表達一切美善事物的實際。以聖經來思考「美」字，就可以清楚瞭解為何「美」字需由「羊」與「大」的組合來加以表明。根據研究得知，造字的倉頡等人應該亦像寫聖經的希伯來人一樣，曾經領受過神聖的啟示，並於創造文字時，將所得到的神聖啟示以甲骨文的方式加以保存下來。

當我們對黃金比例與費氏數列感到相當新鮮有趣時，請讀者也思考一下那些生命現象是與黃金比例或費氏數列有關？又黃金比例或費氏數列在生態工程上該如何應用？這些應該都有助於培養天人合一的胸懷。

敬畏「天」使我們能夠尊敬大自然，並瞭解自然界中之每一個活物都有其存在的意義跟價值，並願意在工程設計及施工的過程中，盡力加以保護。對大自然之美的欣賞應有助於生態工法之設計理念的應用與推廣，這是筆者撰寫這篇文章的主要目的。

誌謝

本文係在國科會計畫 NSC-93-2625-Z-216-001 補助下所

完成，特此申謝。

參考文獻

- [1] 朱天民，「從聖經看甲骨文」，道聲出版社，共 153 頁 (2000)。
- [2] 李美基、鮑博瑞、唐妙娟，「上帝給中國人的應許」，道聲出版社，共 162 頁 (2001)。
- [3] 李常受，「創世記生命讀經第 1~3 冊」，臺灣福音書房，共 1837 頁 (1994)。
- [4] 張郁嵐，「到底有沒有神」，臺灣福音書房，共 104 頁 (1998)。
- [5] 洪萬生，「13 世紀西歐數學百科—斐波那契的〈計算書〉」，科學月刊，第 34 卷，第 7 期，第 636-640 頁 (2003)。
- [6] 蔡聰明，「輾轉相除法、黃金分割與費氏數列(上)」，數學傳播，第 19 卷，第 3 期，第 34-42 頁 (1995)。
- [7] 蔡聰明，「輾轉相除法、黃金分割與費氏數列(下)」，數學傳播，第 19 卷，第 4 期，第 67-72 頁 (1995)。
- [8] 呂志宗、謝瑜萱，「黃金比例與生態工法」，中華大學水域生態環境研究中心，共 298 頁 (2004)。
- [9] Bergen, S.D., Bolton, S.M. and Fridley, J.L., "Design Principles for Ecological Engineering," *Ecological Engineering*, Vol. 18, pp. 201-210 (2001).