

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

認識拓樸 基本拓樸概念電腦動畫設計

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC94-2521-S-216-001-

執行期間：94年08月01日至95年07月31日

執行單位：中華大學應用數學系

計畫主持人：李華倫

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 95 年 10 月 31 日

計畫主持人：李華倫

一、中文摘要：

本計畫探索運用一系列動畫及互動式電腦程式來輔助大學拓樸學課程教學之可能性，主要針對一般學生覺得抽象的基礎觀念如極限點、孤立點、開集合、閉集合、緊致集合和連通集合等基礎觀念。並運用動畫變型的方式表現出同胚、連續映射等性質，另外也探討默比烏斯帶，克萊因瓶及塞佛特曲面等較深入的幾何拓樸曲面。

關鍵詞：極限點，孤立點，開集合，閉集合，緊致集合，連通集合，同胚，連續映射，默比烏斯帶，克萊因瓶，塞佛特曲面。

二、英文摘要：

This project study the possibility of combining 3D computer animations with interactive programs in topology course. Main topics include the fundamental concepts of limit points, isolated points, open set, closed set, compactness and connectedness. Also we try to generate animations for Mobius bend, Klein bottle and Seifert surface those deeper properties in topology and geometry.

Key words: limit points, isolated points, open set, closed set, compact, connected, Mobius bend, Klein bottle and Seifert surface.

三. 報告內容：

前言：

近年來拓樸學在很多不同領域的研究中受到重視，如電腦網路的研究，電腦三維曲面的建構等等都可看到很多拓樸學觀念帶進了電腦圖像的領域。但另一方面在拓樸學，高等微積分，點集拓樸等相關課程上卻幾乎沒有看到結合電腦動畫的教材，我們認為結合電腦三維動畫及互動程式的教材應該可以將拓樸概念生動的表現出來，讓學生欣賞、好奇進而深入思考。

研究目的：

研究、開發並製作生動活潑的拓樸學相關之多媒體教材。

文獻探討：

Jeffrey R. Weeks: The Shape of Space

A. T. Fomenko: Variational Problems in Topology

H. B. Griffiths: Surfaces

George K. Francis: A Topological Picturebook

David W. Henderson: Experiencing Geometry

James R. Munkres: Topology, a first course

Walter Rudin: Principles of Mathematical Analysis

研究方法：

主要研究上述文獻處理數學視覺化的方法，嘗試模仿並實驗新的幾何動畫技巧如 Raytracing 可以製作出比以前更逼真更精彩的光線折射、反射效果。另一方面強調互動電腦程式，探討學生從互動實驗方式體會拓樸性質的可行性。

結果與討論：

在介紹給學生“何謂拓樸”方面我們有好的結果，利用電腦三維動畫可以表現出曲面扭曲變型但不改其拓樸的有趣現象。



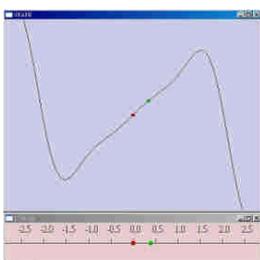
函數的極限觀念



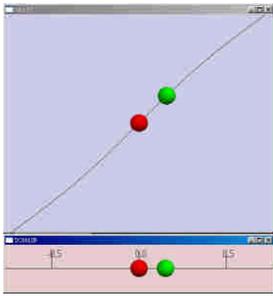
程式一：我們用 Vpython 製作互動式程式，使用者可用滑鼠移動下面紅點來觀察值的變化。



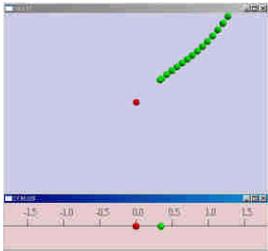
程式二：使用者可用滑鼠移動下面右點來逼近左點來觀察值是否逼近。



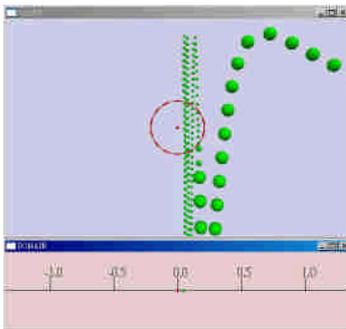
程式三：使用者可用滑鼠移動下面右點來逼近左點來觀察值是否逼近，並具備 zoom 的功能，可以更靠近觀察是否逼近。



這是程式三 zoom in 後的情況。



程式四：我們也嘗試用描點法來觀察逼近的現象

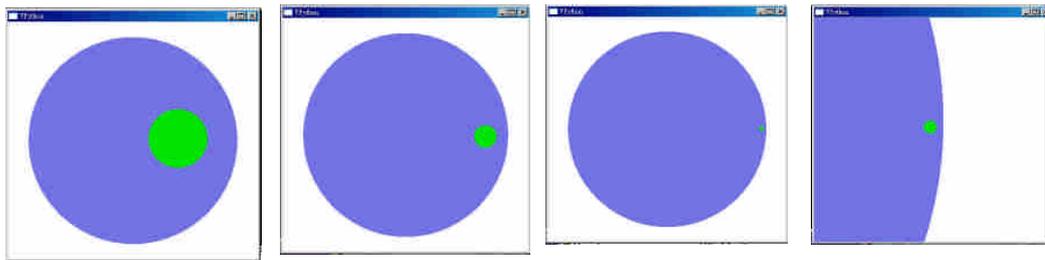


特殊函數圖形：

利用互動程式觀察 $y = \sin(1/x)$ ，下列圖是將點往 $x = 0$ 移動的情況。

開集合，內點：

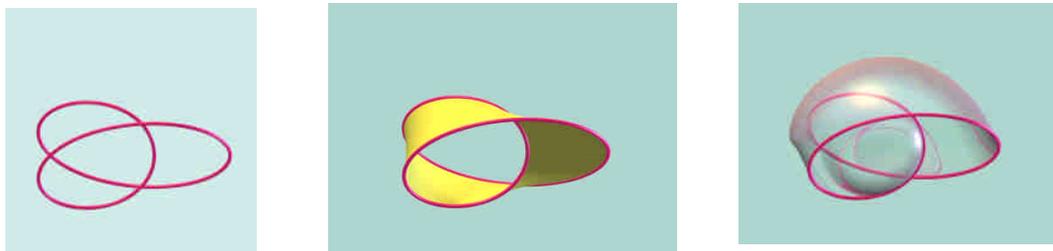
利用互動程式觀察開集合的定義，下列圖是將點往邊界移動的情況。



克萊因瓶動畫：

利用虛擬 3D 攝影機從各種角度，內外觀察。並動畫由管狀曲面拉成克萊因瓶的過程及切開成兩個默比烏斯帶的情況。

動畫表現從一個簡單的圈圈為邊產生沒有方向性的默比烏斯帶，及如何從相同的邊產生具方向性的塞佛特曲面(Seifert Surface)



四、計畫成果自評

本計畫成果，我們自己覺得還可以再進步。比較不理想的有下列兩點：

首先，我們最有興趣研究製作關於 Compact set, Connected set 並不成功，雖然嘗試了多種方式用了很多時間但畫出的動畫並不理想有待改進、加強。

第二點是每次從有想法到動畫完成大多經過快兩星期的時間，與上課進度配合不上無法適時輔助教學，大部分要到下學年才能再派上用場進行學習成效的調查。我們自己覺得滿意之處則是學會了運用 Raytracing 的 3D 畫圖技術將來必可以表現出更擬真的畫面。