

行政院國家科學委員會補助
大專學生參與專題研究計畫研究成果報告

* ***** *
* 計 畫 *
* : 抽水所引致壓密沉陷之數學模式的建立與解析 *
* 名 稱 *
* ***** *

執行計畫學生： 陳馨
學生計畫編號： NSC 97-2815-C-216-003-E
研究期間： 97年07月01日至98年02月28日止，計8個月
指導教授： 呂志宗

處理方式： 本計畫可公開查詢

執行單位： 中華大學土木與工程資訊學系

中華民國 98年03月31日

行政院國家科學委員會補助
大專學生參與專題研究計畫研究成果報告

* 計畫 *
* :抽水所引致壓密沉陷之數學模式的建立與解析 *
* 名稱 *

執行計畫學生：陳馨

學生計畫編號：NSC 97-2815-C-216-003-E

研究期間：97年7月1日至98年2月底止，計8個月

指導教授：呂志宗

執行單位：中華大學土木與工程資訊學系

中華民國九十八年三月三十一日

摘 要

本計畫之研究重點有三個，包括：(1)多孔介質三維壓密理論的研討與整理，(2)抽水所引致壓密沉陷問題之數學模式的建立，(3)以積分轉換方法解析出壓密沉陷問題的閉合解。根據文獻研討知，目前常應用之多孔介質彈力理論有三種，其主要差異為所引用之基本力學常數並不完全相同，但均是耦合的多孔介質彈力理論。應用本研究所研討出之結果，則不論引用何種理論模式所建立之數學模式，均可利用所建立之基本關係式，得出數值研討所需之力學常數值，明瞭各組基本力學常數之異同，並順利推動相關之研究工作。

本研究於建立數學模式時是以單點抽水模擬單井抽水現象，並將含水層模擬為均質之線彈性多孔介質，其中地表之滲流邊界條件是分別模擬為透水暨不透水條件，而抽水型態則分別考慮為以穩定速率抽水及瞬時抽水兩種情況。本研究是引用 Laplace、Hankel 與 Fourier 積分轉換方法解析所建立之數學模式，分別研討出以上所述抽水及滲流邊界條件下之閉合解。根據本研究之探討得知以下重要研究成果：

- (1) 在穩態抽水的考量下，隨著抽水延時的增加，地層中各點之超額孔隙水的負壓會逐漸增加，最後形成一穩態平衡。因孔隙水的負壓增加時，會形成地層有效應力的增加，而導致地層的壓密沉陷量逐漸變大。在瞬時抽水情況下，地層的壓密沉陷量在一開始抽水時會達到極大值，因本研究是將含水層模擬為線彈性之多孔介質，故瞬時抽水所引致之沉陷量會逐漸消失。
- (2) 在穩態抽水且地表模擬為透水條件的考量下，所引致之地表最大水平位移與垂直沉陷量均與抽水深度無關，且地表最大水平位移發生位置與黃金比例 ϕ 有關。由數值結果之研討得知，地表最大水平位移約為地表最大沉陷量之 30.0%。另外，在瞬時抽水條件的考慮下，其所引起的地表最大水平位移約為所對應之地表最大沉陷量的 38.5%。由此可知，抽水所引致之地表水平位移相當顯著，不宜忽略。
- (3) 地表模擬為不透水時，抽水所引致之壓密沉陷量明顯較大。在穩態抽水條件的考慮下，地表模擬為不透水時抽水所引致之壓密沉陷量約是地表模擬為透水時之三倍。由此可知，地表滲流邊界條件對抽水所引起的壓密沉陷之影響相當顯著。

關鍵詞：單點抽水、半無限域、積分轉換、閉合解。

目 錄

摘要	i
目錄	ii
圖目錄	iii
表目錄	iv
第一章 基本方程式研討	1
1-1 前言	1
1-2 第一種類型的多孔介質彈性力學理論	2
1-3 第二種類型的多孔介質彈性力學理論	4
1-4 第三種類型的多孔介質彈性力學理論	5
1-5 結語	7
第二章 抽水引致沉陷之數學模式的建立與其解析	8
2-1 前言	8
2-2 數學模式	9
2-3 數學模式的解析	11
2-3-1 對變數 t 作 Laplace 積分轉換	11
2-3-2 對變數 r 作 Hankel 積分轉換	13
2-3-3 齊性解的解析	15
2-3-4 非齊性解的解析	16
2-3-5 (z, ξ, s) 定義域之特解	19
2-3-6 實數域 (r, z, t) 之特解	24
2-4 數值結果	27
2-5 結語	37
參考文獻	38
誌謝	45
符號說明	46

圖 目 錄

圖 2.1	半無限域中之單點抽水示意圖	9
圖 2.2	以穩定速率抽水且地表模擬為透水情況時於 $r=0$ 位置之平均壓密度 U	30
圖 2.3	瞬時抽水且地表模擬為透水情況時於 $r=0$ 、 h 、 $2h$ 、 $5h$ 位置之平均壓密 度 U	31
圖 2.4	以穩定速率抽水且地表模擬為透水情況時之無因次化壓密沉陷曲 線	31
圖 2.5	以穩定速率抽水且地表模擬為透水情況時之無因次化地表水平位移曲 線	32
圖 2.6	瞬時抽水且地表模擬為透水情況時之無因次化壓密沉陷曲線	32
圖 2.7	瞬時抽水且地表模擬為透水情況時之無因次化地表水平位移曲線 ..	33
圖 2.8	穩定速率抽水時透水暨不透水地表面之無因次化壓密沉陷曲線	34
圖 2.9	穩定速率抽水且地表模擬為透水時之無因次化超額孔隙水壓分佈 $p(r,z,t)/[Q_c\gamma_w/4\pi kh]$	35
圖 2.10	穩定速率抽水且地表模擬為不透水時之無因次化超額孔隙水壓分佈 $p(r,z,t)/[Q_c\gamma_w/4\pi kh]$	36

表 目 錄

表 1.1 各組多孔介質力學常數關係表	6
表 2.1 飽和含水層之基本參數	37

第一章 基本方程式研討

1-1 前言

Biot 之多孔介質彈性力學理論有許多不同的型式，其主要差異在於所引用之基本力學常數有所不同，本章擬探討出不同 Biot 理論模式所引用力學常數彼此間之關係。由研討結果知，若考慮線彈性多孔介質為飽和之均向性介質，且其中之固體與孔隙流體均為可壓縮，則目前之 Biot 三維多孔介質彈力理論模式常被引用的基本力學常數有四組，分別為 $(\mu, \lambda, Q, \alpha)$ 、 (μ, λ, Q, R) 、 $(\mu, \lambda, M, \alpha)$ 與 (μ, λ, B, ν_u) 等。本章擬分別研討出各組參數彼此間之關係，使有助於獲取多孔介質彈性力學理論中基本力學常數之參數值，並建立問題之基本方程式。

合理之三維多孔介質彈性力學理論 (Poroelasticity) 最早是由 Biot[1]所提出的，此理論模式是考慮多孔介質為均向性之線彈性介質，並引用基本力學常數 $(\mu, \lambda, Q, \alpha)$ 研討多孔介質之基本方程式，其中 μ 與 λ 分別為多孔介質之剪力係數 (Shear Modulus) 與 Lamé 常數； Q 與 α 則為固體介質與孔隙流體間之互制作用係數。理論模式中之基本力學常數至今仍被文獻加以引用[2, 3]。

為推廣理論模式之應用範圍，在後續的研究中，Biot[4]曾進一步探討異向性 (Anisotropy) 介質情況下之多孔介質彈力理論。Biot 於文獻[4]中亦曾研討均向性介質情況下之多孔介質彈力理論，但所引用之基本力學常數 (μ, λ, Q, R) 與文獻[1]並不完全相同，其中 μ 與 λ 之定義與文獻[1]相同，但 Q 與 R 則為新定義之固體介質與孔隙流體間的互制作用係數。目前，仍有許多學者引用文獻[4]所建立之理論模式，研討多孔介質之彈力問題[5, 6]。

為使 Biot 多孔介質彈性力學理論所定義之基本力學常數容易由基本力學試驗獲得，Biot 在文獻[7]中重新整理多孔介質彈力理論中之應力與應變的組成律 (Constitutive Law) 關係式，以使相關理論易於應用。此一型態之理論模式係引用 $(\mu, \lambda, M, \alpha)$ 為基本力學常數，其中 μ 與 λ 之定義仍與文獻[1]相同， M 與 α 則為新定義之固體介質與孔隙流體間的互制作用係數。此一理論模式常被應用於探討多孔介質之彈性動力學問題[8, 9]，當然亦可應用於研討擬靜態 (Quasi-static) 之多孔介質彈力問題[10]。Biot 在文獻[11]中曾對其所提出之各種力學常數仔細加以研討。

多孔介質彈性力學理論在土壤的壓密 (Consolidation) 問題上有重要之應用，為使此一理論模式中固體介質與孔隙流體間的互制係數容易由土壤力學上所熟悉之係數獲得，Rice 與 Cleary[12]保留 μ 與 λ 這兩個力學常數，再引進孔隙流體為不排出 (Undrained) 情況下所測得之柏松比 (Poisson's Ratio) ν_u 與 Skempton 孔隙流體壓力參數 B [13]，改寫 Biot[1]於 1941 年所建立之理論模式，所建立之基本方程式係以 (μ, λ, B, ν_u) 等為基本力學常數。許多文獻[14, 15]在探討擬靜態之多孔介質彈力問題時，即常引用 Rice 等人[12]所建立之 Biot 多孔介質彈力理論作解析，因其所使用之基本力學常數較容易由基本土壤力學試驗獲得。

由以上說明知，近來常被引用之 Biot 多孔介質彈力理論模式常以文獻[1, 4, 7, 12]所建立的多孔介質彈力理論為基礎，雖然理論模式所引用之基本力學常數並不完全相同，但是均屬耦合 (Coupled) 多孔介質彈力理論模式，各組力學常數彼此間之關係即為本章研討重點。應用本章所研討出之結果，可順利得出數值分析過程所需之力學常數值，使相關研究工作順利推動。

1-2 第一種類型的多孔介質彈性力學理論

此為 Biot[1]於 1941 年所建立之多孔介質彈性力學理論，根據此一理論模式所建立之基本方程式如以下所示：

$$(\lambda + \mu)u_{k,ki} + \mu u_{i,kk} - \alpha p_{,i} + f_i = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$-\frac{k}{\gamma_f} p_{,kk} + \alpha \dot{u}_{k,k} + \frac{1}{Q} \dot{p} - q = 0, \quad (\text{A.2})$$

其中 μ 與 λ 分別是多孔介質之剪力係數與 Lamé 常數； Q 和 α 則係固體介質與孔隙流體間之互制作用係數； u_i 是多孔介質之位移分量； p 表超額孔隙流體壓力 (Excess Pore Fluid Pressure)，其以壓力為正； k 係多孔介質之滲透係數 (Permeability)； γ_f 表孔隙流體之單位重 (Unit Weight)； f_i 是多孔介質之微體力 (Body Force)； q 為孔隙流體之補注變率。

或

此為 Biot[7]於 1956 年所建立之多孔介質彈性力學理論，根據此一理論模式所建立之基本方程式如以下所示：

$$(\lambda + \mu)u_{k,ki} + \mu u_{i,kk} - \alpha p_{,i} + f_i = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$-\frac{k}{\gamma_f} p_{,kk} + \alpha \dot{u}_{k,k} + \frac{1}{M} \dot{p} - q = 0, \quad (\text{B.2})$$

其中 μ 與 λ 分別是多孔介質之剪力係數與 Lamé 常數；其中之互制力學常數 M 即為 Biot[1]在 1941 年所定義之力學常數 Q ，而力學常數 α 亦與 Biot[1]於 1941 年所定義之力學常數 α 相同。 u_i 是多孔介質之位移分量； p 表超額孔隙流體壓力 (Excess Pore Fluid Pressure)，其係以壓力為正； k 是多孔介質之滲透係數 (Permeability)； γ_f 表孔隙流體之單位重 (Unit Weight)； f_i 是多孔介質之微體力 (Body Force)； q 為孔隙流體之補注變率。

式(A.1)-(A.2)與式(B.1)-(B.2)之型式極為相似，其由來與多孔介質之組成律 (Constitutive Law) 等有關，說明如下。Biot[1]於 1941 年所建立之理論模

式中，於研討多孔介質之組成律關係式時，即有考慮固體介質與孔隙流體間之互制作用關係。若考慮多孔介質為均向性之飽和線彈性體，則其組成律關係式可表為：

$$\tau_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) - \alpha p \delta_{ij} , \quad (1.1a)$$

$$\theta = \alpha u_{k,k} + \frac{1}{Q} p , \quad (1.1b)$$

其中 τ_{ij} 為作用於多孔介質之總應力 (Total Stress)； θ 係單位多孔介質於單位體積內所增加之孔隙流體體積； u_i 是多孔介質之位移分量； p 表超額孔隙流體壓力 (Excess Pore Fluid Pressure)，其係以壓力為正； δ_{ij} 為 Kronecker delta 函數； μ 與 λ 分別是多孔介質之剪力係數與 Lamé 常數； Q 和 α 則是固體介質與孔隙流體間之互制作用係數。

若考慮孔隙流體的流動遵守 Darcy 定律，則：

$$v_i = -\frac{k}{\gamma_f} p_{,i} , \quad (1.2)$$

其中 v_i 為孔隙流體之流速； k 係多孔介質之滲透係數 (Permeability)； γ_f 表孔隙流體之單位重 (Unit Weight)。將 Darcy 定律式(1.2)與組成律關係式(1.1a)與(1.1b)代入以下有考慮多孔介質微體力 (Body Force) f_i 與孔隙流體補注變率 q 之力平衡方程式(1.3a)與流量連續方程式(1.3b)中：

$$\tau_{ij,j} + f_i = 0 , \quad (1.3a)$$

$$\dot{\theta} + v_{k,k} = q , \quad (1.3b)$$

則理論模式之基本方程式可表為：

$$(\lambda + \mu) u_{k,ki} + \mu u_{i,kk} - \alpha p_{,i} + f_i = 0 , \quad (1.4a)$$

$$-\frac{k}{\gamma_f} p_{,kk} + \alpha \dot{u}_{k,k} + \frac{1}{Q} \dot{p} - q = 0 . \quad (1.4b)$$

式(1.4a)-(1.4b)即引用 $(\mu, \lambda, Q, \alpha)$ 為基本力學常數，以試驗獲取這些常數時，必須考慮固體介質與孔隙流體間之互制力學行為變化。其他係數 n 、 k 、 γ_f 本單元並未將其列為基本力學常數，因其與固體介質和孔隙流體間之力學交互作用現象無關。

另一組與式(1.4a)-(1.4b)極為相似之基本方程式則是由 Biot[7] 於 1956 年所建立的，係引用基本力學常數 $(\mu, \lambda, M, \alpha)$ 建立理論模式之基本方程式，其中之互制力學常數 M 即為 Biot[1] 在 1941 年所定義之力學常數 Q ，而力學常數 α 亦與 Biot[1] 於 1941 年所定義之力學常數 α 相同。然而 Biot 於文獻[7]中之研討的主

要目的是擬介紹多孔介質之彈性動力學模式，並且仍引用文獻[4]中之固體介質與孔隙流體具相對位移的觀念建立基本方程式。為方便作比較，本節仍將相關方程式以式(1.1a)-(1.1b)的方式加以表達。基於此，線彈性飽和均向性多孔介質的組成律關係式可表為[7]：

$$\tau_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) - \alpha p \delta_{ij} , \quad (1.5a)$$

$$\theta = \alpha u_{k,k} + \frac{1}{M} p , \quad (1.5b)$$

其中單位多孔介質體積內所增加之孔隙流體體積 θ 在文獻[7]中係以 ζ 表示；其他各項物理量或參數之符號定義仍與式(1.1a)-(1.1b)相同。

所建立之基本方程式亦可由將式(1.5a)、式(1.5b)與 Darcy 定律式(1.2)代入力平衡方程式(1.3a)與流量連續方程式(1.3b)中獲得，其結果如以下所示：

$$(\lambda + \mu) u_{k,ki} + \mu u_{i,kk} - \alpha p_{,i} + f_i = 0 , \quad (1.6a)$$

$$-\frac{k}{\gamma_f} p_{,kk} + \alpha \dot{u}_{k,k} + \frac{1}{M} \dot{p} - q = 0 . \quad (1.6b)$$

式(1.6a)-(1.6b)即是引用 $(\mu, \lambda, M, \alpha)$ 為基本力學常數所建立之基本方程式。

1-3 第二種類型的多孔介質彈性力學理論

此為 Biot[4]於 1955 年所建立之多孔介質彈性力學理論，根據此一理論模式所建立之基本方程式如以下所示：

$$(\lambda + \mu) u_{k,ki} + \mu u_{i,kk} - n \frac{Q+R}{R} p_{,i} + f_i = 0 , \quad (C.1)$$

$$-\frac{k}{\gamma_f} p_{,kk} + n \frac{Q+R}{R} \dot{u}_{k,k} + \frac{n^2}{R} \dot{p} - q = 0 , \quad (C.2)$$

其中 μ 與 λ 分別是多孔介質之剪力係數與 Lamé 常數； Q 與 R 分別為 Biot[4]新定義之固體介質與孔隙流體間的互制作用係數，亦即這裏的力學常數 Q 與式(1.1b)所定義之力學常數 Q 並不相同。 u_i 是多孔介質之位移分量； p 表超額孔隙流體壓力 (Excess Pore Fluid Pressure)，其以壓力為正； n 與 k 係多孔介質之孔隙率 (Porosity) 與滲透係數 (Permeability)； γ_f 表孔隙流體之單位重 (Unit Weight)； f_i 是多孔介質之微體力 (Body Force)； q 為孔隙流體之補注變率。

式(C.1)與式(C.2)之由來與多孔介質之組成律 (Constitutive Law) 有關，說明如下。Biot[4]在此引進孔隙率 (Porosity) n 的觀念說明作用於多孔介質之孔隙

流體壓力變化，再以孔隙流體與固體介質會產生相對位移的現象分析多孔介質之位變變化，並將其理論模式推廣至異向性介質情況。本單元將僅研討均向性介質之理論模式，並將相關方程式整理成類似前一節所述之型式，以方便作比較。

基於以上之說明，考慮飽和與多孔介質為線彈性體，則 Biot 所建立之多孔介質組成律關係式如以下所示[4]：

$$\tau_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) - n \frac{Q+R}{R} p \delta_{ij} , \quad (1.7a)$$

$$\theta = n \frac{Q+R}{R} u_{k,k} + \frac{n^2}{R} p , \quad (1.7b)$$

式中 τ_{ij} 、 θ 、 u_i 、 p 、 δ_{ij} 、 μ 、 λ 之定義仍和式(1.1a)與式(1.1b)相同； Q 與 R 分別為 Biot[4]新定義之固體介質與孔隙流體間的互制作用係數，亦即這裏的力學常數 Q 與式(1.1b)所定義之力學常數 Q 並不相同。上式中所引用之基本力學常數(μ, λ, Q, R)與文獻[4]中曾出現之力學常數 A 、 N 、 S 的關係為：

$$\mu = N , \quad (1.8a)$$

$$\lambda = S = A - \frac{Q^2}{R} 。 \quad (1.8b)$$

將式(1.7a)、式(1.7b)與 Darcy 定律式(1.2)代入力平衡方程式(1.3a)與流量連續方程式(1.3b)中，則理論模式之基本方程式可表為：

$$(\lambda + \mu) u_{k,ki} + \mu u_{i,kk} - n \frac{Q+R}{R} p_{,i} + f_i = 0 , \quad (1.9a)$$

$$-\frac{k}{\gamma_f} p_{,kk} + n \frac{Q+R}{R} \dot{u}_{k,k} + \frac{n^2}{R} \dot{p} - q = 0 , \quad (1.9b)$$

上式係引用基本力學常數(μ, λ, Q, R)所建立之基本方程式。以試驗取得其他係數 n 、 k 、 γ_f 時，不必考慮固體介質與孔隙流體間之交互作用現象。

1-4 第三種類型的多孔介質彈性力學理論

近年來，由於 Rice 與 Cleary[12]所引用之多孔介質力學常數容易由基本力學試驗獲得，因此，其所建立之 Biot 多孔介質彈性力學理論已漸被廣泛引用。其理論模式中，引進流體不排出情況下所測得之柏松比 ν_u 與 Skempton 孔隙流體壓力參數 B [13]，改寫 Biot[1]於 1941 年所建立之理論模式，所建立之基本方程式係以(μ, λ, B, ν_u)等為基本力學常數。基於此，飽和均向性之線彈性多孔介質的組成律關係式可表為[12]：

$$\tau_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+\nu_u)} p \delta_{ij} , \quad (1.10a)$$

$$\theta = \frac{3(v_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+v_u)} u_{k,k} + \frac{9(v_u - \nu)(1-2\nu)}{2\mu B^2(1-2\nu)(1+v_u)^2} p, \quad (1.10b)$$

其中 θ 在文獻[12]中仍以 ζ 表示； ν 為考慮流體係排出情況下 (Drained) 所測得之多孔介質柏松比，其與力學常數 μ 、 λ 的關係為：

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (1.11)$$

將式(1.10a)、式(1.10b)與 Darcy 定律式(1.2)代入力平衡方程式(1.3a)與流量連續方程式(1.3b)中，則多孔介質彈性力學理論之基本方程式可表為：

$$(\lambda + \mu)u_{k,ki} + \mu u_{i,kk} - \frac{3(v_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+v_u)} p_{,i} + f_i = 0, \quad (1.12a)$$

$$-\frac{k}{\gamma_f} p_{,kk} + \frac{3(v_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+v_u)} \dot{u}_{k,k} + \frac{9(v_u - \nu)(1-2\nu)}{2\mu B^2(1-2\nu)(1+v_u)^2} \dot{p} - q = 0, \quad (1.12b)$$

其中 (μ, λ, B, ν_u) 等力學常數最易經由試驗取得，許多文獻均有列示不同種類多孔介質之 (μ, λ, B, ν_u) 值。因此，以 (μ, λ, B, ν_u) 為基本力學常數所建立之多孔介質彈力理論之基本方程式漸漸廣被引用。為清楚起見，本單元擬利用如下所建立之表 1.1 列示各組力學常數彼此間之關係，使相關研究人員容易獲得所需之基本力學常數，並熟悉各組基本力學常數之異同。

表 1.1 各組多孔介質力學常數關係表

	$(\mu, \lambda, Q, \alpha)^{[1]}$	$(\mu, \lambda, Q, R)^{[4]}$	$(\mu, \lambda, M, \alpha)^{[7]}$	$(\mu, \lambda, B, \nu_u)^{[12]}$
$(\mu, \lambda, Q, \alpha)^{[1]}$	-	$Q^{[4]} = nQ(\alpha - n)^{[1]}$ $R^{[4]} = n^2 Q^{[1]}$	$M = Q$	$\nu_u = \frac{\lambda + \alpha^2 Q}{2(\lambda + \mu + \alpha^2 Q)}$ $B = \frac{3\alpha Q}{3\lambda + 2\mu + 3\alpha^2 Q}$
$(\mu, \lambda, Q, R)^{[4]}$	$\alpha^{[1]} = n \frac{Q + R}{R}^{[4]}$ $Q^{[1]} = \frac{R^{[4]}}{n^2}$	-	$\alpha = n \frac{Q + R}{R}$ $M = \frac{R}{n^2}$	$\nu_u = \frac{\lambda + \frac{(Q+R)^2}{R}}{2 \left[\lambda + \mu + \frac{(Q+R)^2}{R} \right]}$ $B = \frac{3(Q+R)}{n \left[3\lambda + 2\mu + 3 \frac{(Q+R)^2}{R} \right]}$
$(\mu, \lambda, M, \alpha)^{[7]}$	$Q = M$	$Q = nM(\alpha - n)$ $R = n^2 M$	-	$\nu_u = \frac{\lambda + \alpha^2 M}{2(\lambda + \mu + \alpha^2 M)}$ $B = \frac{3\alpha M}{3\lambda + 2\mu + 3\alpha^2 M}$
$(\mu, \lambda, B, \nu_u)^{[12]}$	$\alpha = \frac{3(v_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+v_u)}$ $Q = \frac{2\mu B^2(1-2\nu)(1+v_u)^2}{9(v_u - \nu)(1-2\nu)}$	$Q = \frac{2\mu n B(1+v_u)}{3(1-2\nu)}$ $\frac{2\mu n^2 B^2(1-2\nu)(1+v_u)^2}{9(v_u - \nu)(1-2\nu)}$ $R = \frac{2\mu n^2 B^2(1-2\nu)(1+v_u)^2}{9(v_u - \nu)(1-2\nu)}$	$\alpha = \frac{3(v_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+v_u)}$ $M = \frac{2\mu B^2(1-2\nu)(1+v_u)^2}{9(v_u - \nu)(1-2\nu)}$	-

1-5 結語

本單元旨在研討 Biot 多孔介質彈力理論之基本力學常數的關係。由文獻研討知，目前常應用之多孔介質彈力理論有三種，其主要差異為所引用之基本力學常數並不完全相同，但均是耦合的多孔介質彈力理論。應用本文所研討出之結果，則不論引用何種理論模式所建立之數學模式，均可利用表 1.1 之關係式，得出數值研討所需之力學常數值，明瞭各組基本力學常數之異同，並順利推動相關研究工作。

第二章 抽水引致沉陷之數學模式的建立與其解析

2-1 前言

地下水超抽所引起的地層下陷問題，直到如今仍為國人所深刻關切[16, 17]，也是世界各國在經濟發展過程中常見的問題[18-27]。為解決此一問題，以往國內外已有許多學者專家進行許多相關之研究，近年來國科會亦曾補助許多與地層下陷議題相關之計畫案[28-41]進行相關之研究。此外，水利署等相關單位亦持續進行地層下陷區之沉陷監測，並有設置宣導網站[42-44]，進行地層下陷之防治與宣導，且已具有一定之成效，值得肯定。然而，經研討過相關之文獻後發現，目前國內較少針對抽水所引致地層下陷問題的解析進行相關之研究，但是很多以數值模擬為基礎之相關研究，常需以解析解為基礎，用以研判其數值模擬之分析結果是否正確無誤。基於此，本計畫在指導老師的指導下，進行相關之研究，並已獲致重要之研究成果。

Terzaghi[45]首先引用有效應力觀念 (Effective Stress Concept) 說明土壤的壓密過程，在其理論模式中，須先解析出平衡孔隙水壓力，然後再間接計算出壓密沉陷量。然而 Biot[1, 4]所考慮之孔隙水的平衡過程則與土壤固體直接相關，所得出之結果亦被證實較為合理可靠。Biot[1, 4]所建立之壓密理論模式中，若於質量守衡方程式中同時考慮孔隙水與固體介質的影響，則所建立之壓密模式稱為耦合壓密模式；若質量守衡方程式中僅考慮孔隙水的影響，則所建立之壓密模式稱為非耦合壓密模式。本研究於探討單點抽水所引致的地層超額孔隙水壓分佈時，擬引用 Biot 之非耦合壓密模式建立基本方程式，再以積分轉換方法解析所建立之數學模式的解。Booker 與 Carter[46-49]、Tarn 與 Lu[50]、Lu 與 Lin[51-55]、Lin 與 Lu[56]、Chen[57, 58]、Worsak 與 Chau[59]等人均曾研討過單點抽水所引致之地層位移與超額孔隙水壓。但以上所述相關文獻之研究過程中，均未曾同時探討穩定速率抽水與瞬時抽水之暫態壓密沉陷問題的閉合解，故本計畫擬探討其沉陷行為之差異性；此外，本計畫亦擬探討穩定速率抽水與瞬時抽水所引致的地層孔隙水壓分佈。

根據各界對抽水所引致地層下陷問題之學理分析發現，抽水時除會引起地層下陷外，亦會引起地層之水平位移，國內外亦已有許多相關之文獻[60-65]的監測結果印證此一結論。然而，地層水平位移常被忽略卻是事實，根據本計畫案之指導老師的研究發現[51-56]，當地表模擬為透水情況時，抽水所引致之最大地表水平位移並不宜忽略。以學理分析為基礎之相關研究成果，亦已有許多文獻[66-68]證明抽水所引致之地表水平位移相當顯著。基於以上考量，本計畫所引用之分析模式即是非單向度之壓密模式；另外，由文獻研討得知，以上各類問題之相關研究成果，均較少完整討論地表邊界分別模擬為透水暨不透水、地層滲流條件為橫向等向性時之暫態壓密解析解，這些研究重點均已呈現在本計畫案所建立之數學模式中，並引用積分轉換等方法加以解析，以研討出單點抽水所引致壓密沉陷之暫態閉合解。

本單元旨在考慮如圖 2.1 所示之單點抽水所引致的地表壓密沉陷，其係將飽和含水地層模擬為均質之半無限域多孔介質，並以單點抽水模擬單井抽水的現

象，因讓座標 z 軸通過抽水點，故問題可進一步化簡為軸對稱情況。此外，其地表力學邊界條件是考慮為無正向應力與剪應力變化的情況，地表滲流邊界條件則模擬為透水暨不透水兩種情況；而在無限遠處之邊界上 ($z \rightarrow \infty$)，則考慮各種物理變化量均不受單點抽水的影響。本計畫是引用 Laplace、Hankel 與 Fourier 積分轉換方法解析所建立之數學模式，所研討出之解為閉合解 (Closed-form Solution)。

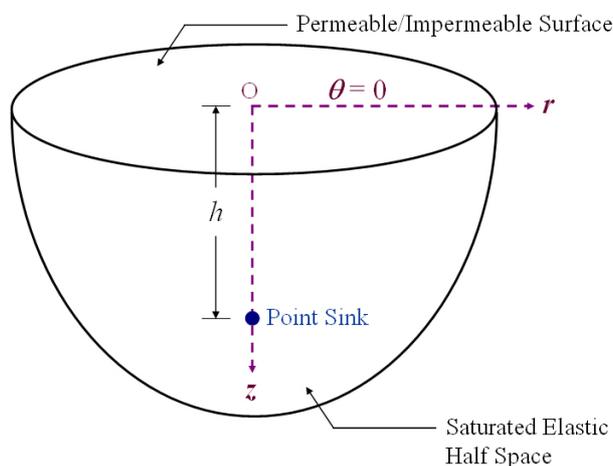


圖 2.1 半無限域中之單點抽水示意圖

2-2 數學模式

如圖 2.1 所示，飽和含水地層係模擬為均質之線彈性多孔介質，但其水平方向的滲流速度與垂直方向的滲流速度則考慮為不同，並以單點抽水模擬單井抽水的現象。若考慮座標 z 軸通過抽水點，且抽水深度為 h ，則抽水問題的非耦合控制方程式可以軸對稱圓柱座標 (r, z) 表為[51]：

$$G\nabla^2 u_r + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} - G \frac{u_r}{r^2} - \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (2.1a)$$

$$G\nabla^2 u_z + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (2.1b)$$

$$-\frac{k_r}{\gamma_w} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + n\beta \frac{\partial p}{\partial t} + q = 0, \quad (2.1c)$$

其中 k_r 、 k_z 、 n 、 G 與 ν 為飽和含水地層之水平滲透係數、垂直滲透係數、孔隙率 (Porosity)、剪力模數 (Shear Modulus) 與柏松比 (Poisson's Ratio)； γ_w 與 β 是孔隙水之單位重 (Unit Weight) 與體積壓縮係數 (Compressibility)； u_r 與 u_z 為飽和含水層之水平位移與垂直位移； p 則是超額孔隙水壓 (Excess Pore Water Pressure)； q 表抽水作用源。

本研究所考慮的抽水作用源 q 包含以下兩種情況。

■ 穩定速率抽水情況

亦即所考慮的抽水作用源 q 為：

$$q = q(r, z, t) = \frac{Q_c}{2\pi r} \delta(r) \delta(z-h) u(t), \quad (2.2a)$$

其中 Q_c 是於單位時間內以穩定速率抽水時所抽出的地下水體積，因此 Q_c 的單位是體積除以時間； $\delta(x)$ 為 Dirac delta 函數； $u(t)$ 則是單位階梯函數 (Unit Step Function 或 Heaviside Step Function)。

■ 瞬時抽水情況

亦即所考慮的抽水作用源 q 為：

$$q = q(r, z, t) = \frac{Q_0}{2\pi r} \delta(r) \delta(z-h) \delta(t), \quad (2.2b)$$

其中 Q_0 是當 $t \rightarrow 0^+$ 時，自飽和含水層瞬間抽出的地下水之體積，也就是說 Q_0 的單位是體積單位， Q_0 與 Q_c 的單位並不相同。因本單元是考慮飽和含水地層為線彈性之多孔介質，故瞬間抽水所引致之沉陷長期而言會逐漸消失。

如圖 2.1 所示之抽水問題中，其地表邊界 ($z=0$) 是考慮為無任何應力變化，亦即：

$$\sigma'_{rz}(r, 0, t) = G \left[\frac{\partial u_r(r, 0, t)}{\partial z} + \frac{\partial u_z(r, 0, t)}{\partial r} \right] = 0, \quad (2.3a)$$

$$\sigma'_{zz}(r, 0, t) = 2\eta G \frac{\partial u_z(r, 0, t)}{\partial z} + 2(\eta - 1) G \left[\frac{\partial u_r(r, 0, t)}{\partial r} + \frac{u_r(r, 0, t)}{r} \right] = 0, \quad (2.3b)$$

其中參數 $\eta = (1-\nu)/(1-2\nu)$ ； σ'_{ij} (張力定義為正的量) 表作用於飽和含水層之有效應力 (Effective Stress)，且 $\sigma'_{ij} = \tau_{ij} + p$ ， τ_{ij} (張力定義為正的量) 是作用於飽和含水層之總應力 (Total Stress)，超額孔隙水壓 p 則將壓力定義為正的量。此外， $z=0$ 之地表邊界的滲流性質可分別模擬為透水暨不透水兩種情況。

■ 若考慮地表邊界完全透水

則地表之滲流邊界條件可表為：

$$p(r, 0, t) = 0. \quad (2.3c)$$

■ 若考慮地表邊界為完全不透水

則由 Darcy 定律得知，地表之滲流邊界條件可表為：

$$\frac{\partial p(r, 0, t)}{\partial z} = 0 \quad (2.3d)$$

式(2.3a)-(2.3d)組成半無限域之單點抽水問題於地表 ($z=0$) 力學與滲流的邊界條件。

此外，可考慮如圖 2.1 所示半無限域中之無限深遠處 ($z \rightarrow \infty$) 的邊界不受點抽水的影響，亦即，問題之另一組邊界條件可表為：

$$\lim_{z \rightarrow \infty} u_r(r, z, t) = 0 \quad (2.4a)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} u_z(r, z, t) = 0 \quad (2.4b)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} p(r, z, t) = 0 \quad (2.4c)$$

關於問題之初始條件則是考慮所有的物理量在一開始的時候都沒有變化，因此，問題之初始條件可表為：

$$\lim_{t \rightarrow 0} u_r(r, z, t) = 0 \quad (2.5a)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} u_z(r, z, t) = 0 \quad (2.5b)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} p(r, z, t) = 0 \quad (2.5c)$$

式(2.1a)-(2.1c)、(2.3a)-(2.3d)、(2.4a)-(2.4c)、(2.5a)-(2.5c)組成單點抽水問題之數學模式。本研究於解析數學模式之解時，擬採用 Laplace、Hankel 與 Fourier 積分轉換方法等，說明如下。

2-3 數學模式的解析

2-3-1 對變數 t 作 Laplace 積分轉換

式(2.1a)-(2.1c)是與自變數 r 、 z 、 t 有關之聯立偏微分方程式，此為線性 (Linear) 的非齊次 (Non-homogeneous) 微分方程式。解析問題時，首先引用式(2.5a)-(2.5c)之初始條件，對式(2.1a)-(2.1c)作 Laplace 積分轉換，基於此，可得 [69]：

$$\left[2\eta \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] U_r + (2\eta - 1) \frac{\partial^2 U_z}{\partial r \partial z} - \frac{1}{G} \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad (2.6a)$$

$$(2\eta - 1) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) U_r + \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + 2\eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] U_z - \frac{1}{G} \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (2.6b)$$

$$-\frac{k_r}{\gamma_w} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \right) - \frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + n\beta s P + Q = 0 \quad (2.6c)$$

其中符號 s 是 Laplace 積分轉換參數；符號 $\eta = (1-\nu)/(1-2\nu)$ ； U_r 、 U_z 、 P 、 Q

分別定義如下：

$$U_r(r, z; s) = \int_0^{\infty} u_r(r, z, t) e^{-st} dt, \quad (2.7a)$$

$$U_z(r, z; s) = \int_0^{\infty} u_z(r, z, t) e^{-st} dt, \quad (2.7b)$$

$$P(r, z; s) = \int_0^{\infty} p(r, z, t) e^{-st} dt, \quad (2.7c)$$

$$Q(r, z; s) = \int_0^{\infty} q(r, z, t) e^{-st} dt. \quad (2.7d)$$

上式中符號 U_r 、 U_z 、 P 之 Laplace 反轉換則定義為：

$$u_r(r, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} U_r(r, z; s) e^{st} ds, \quad (2.7a^*)$$

$$u_z(r, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} U_z(r, z; s) e^{st} ds, \quad (2.7b^*)$$

$$p(r, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} P(r, z; s) e^{st} ds. \quad (2.7c^*)$$

式(2.6c)中之抽水作用源 Q 包含以下兩種情況。

■ 穩定速率抽水情況

$$Q = \frac{Q_c}{2\pi r s} \delta(r) \delta(z-h). \quad (2.8a)$$

■ 瞬時抽水情況

$$Q = \frac{Q_0}{2\pi r} \delta(r) \delta(z-h). \quad (2.8b)$$

另外，地表 $z=0$ 之邊界條件與無限深遠處 $z \rightarrow \infty$ 之邊界條件可分別表為式(2.9a)-(2.9d)與(2.10a)-(2.10c)的型式。茲對式(2.3a)-(2.3d)作 Laplace 積分轉換，可得地表 $z=0$ 之力學邊界條件如以下所示：

$$\frac{\partial U_r(r, 0; s)}{\partial z} + \frac{\partial U_z(r, 0; s)}{\partial r} = 0, \quad (2.9a)$$

$$\eta \frac{\partial U_z(r, 0; s)}{\partial z} + (\eta - 1) \left[\frac{\partial U_r(r, 0; s)}{\partial r} + \frac{U_r(r, 0; s)}{r} \right] = 0. \quad (2.9b)$$

■ 若考慮地表邊界完全透水

則地表之滲流邊界條件可表為：

$$P(r, 0; s) = 0. \quad (2.9c)$$

■ 若考慮地表邊界完全不透水

則地表之滲流邊界條件可表為：

$$\frac{\partial P(r, 0; s)}{\partial z} = 0 \quad (2.9d)$$

對式(2.4a)-(2.4c)作 Laplace 積分轉換，可得無限深遠處 ($z \rightarrow \infty$) 之邊界條件如以下所示：

$$\lim_{z \rightarrow \infty} U_r(r, z; s) = 0 \quad (2.10a)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} U_z(r, z; s) = 0 \quad (2.10b)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P(r, z; s) = 0 \quad (2.10c)$$

式(2.9a)-(2.9d)與式(2.10a)-(2.10c)中之符號 U_r 、 U_z 、 P 的定義如式(2.7a)-(2.7c)所示。

2-3-2 對變數 r 作 Hankel 積分轉換

經 Laplace 積分轉換後，式(2.6a)-(2.6c)、(2.9a)-(2.9d)與(2.10a)-(2.10c)是與自變數 r 、 z 有關之數學模式，解析過程中可繼續對其中之自變數 r 進行 Hankel 積分轉換。式(2.6a)-(2.6c)分別進行 1 階、0 階與 0 階之 Hankel 積分轉換後可得[70]：

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - 2\eta\xi^2 \right) \tilde{U}_r - (2\eta - 1)\xi \frac{d\tilde{U}_z}{dz} + \frac{1}{G} \xi \tilde{P} = 0 \quad (2.11a)$$

$$(2\eta - 1)\xi \frac{d\tilde{U}_r}{dz} + \left(2\eta \frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 \right) \tilde{U}_z - \frac{1}{G} \frac{d\tilde{P}}{dz} = 0 \quad (2.11b)$$

$$\left(\frac{k_r}{\gamma_w} \xi^2 - \frac{k_z}{\gamma_w} \frac{d^2}{dz^2} \right) \tilde{P} + n\beta s \tilde{P} + \tilde{Q} = 0 \quad (2.11c)$$

其中符號 ξ 是 Hankel 積分轉換參數； \tilde{U}_r 、 \tilde{U}_z 、 \tilde{P} 、 \tilde{Q} 分別定義為：

$$\tilde{U}_r(z; \xi, s) = \int_0^\infty r U_r(r, z; s) J_1(\xi r) dr \quad (2.12a)$$

$$\tilde{U}_z(z; \xi, s) = \int_0^\infty r U_z(r, z; s) J_0(\xi r) dr \quad (2.12b)$$

$$\tilde{P}(z; \xi, s) = \int_0^\infty r P(r, z; s) J_0(\xi r) dr \quad (2.12c)$$

$$\tilde{Q}(z; \xi, s) = \int_0^\infty r Q(r, z; s) J_0(\xi r) dr \quad (2.12d)$$

\tilde{U}_r 、 \tilde{U}_z 、 \tilde{P} 之 Hankel 反轉換則分別定義為：

$$U_r(r, z; s) = \int_0^\infty \xi \tilde{U}_r(z; \xi, s) J_1(\xi r) d\xi, \quad (2.12a^*)$$

$$U_z(r, z; s) = \int_0^\infty \xi \tilde{U}_z(z; \xi, s) J_0(\xi r) d\xi, \quad (2.12b^*)$$

$$P(r, z; s) = \int_0^\infty \xi \tilde{P}(z; \xi, s) J_0(\xi r) d\xi. \quad (2.12c^*)$$

式(2.11c)中之抽水作用源 \tilde{Q} 包含以下兩種情況。

■ 穩定速率抽水情況

$$\tilde{Q} = \frac{Q_c}{2\pi s} \delta(z-h). \quad (2.13a)$$

■ 瞬時抽水情況

$$\tilde{Q} = \frac{Q_0}{2\pi} \delta(z-h). \quad (2.13b)$$

另外，再對式(2.9a)-(2.9d)所示之地表 $z=0$ 的邊界條件中之變數 r 分別作 1 階、0 階、0 階、0 階之 Hankel 積分轉換後，可得地表力學邊界條件(2.14a)-(2.14b)與滲流邊界條件(2.14c)-(2.14d)如以下所示：

$$\frac{d\tilde{U}_r(0; \xi, s)}{dz} - \xi \tilde{U}_z(0; \xi, s) = 0, \quad (2.14a)$$

$$\eta \frac{d\tilde{U}_z(0; \xi, s)}{dz} + (\eta - 1) \xi \tilde{U}_r(0; \xi, s) = 0. \quad (2.14b)$$

■ 若考慮地表邊界完全透水

則地表之滲流邊界條件可表為：

$$\tilde{P}(0; \xi, s) = 0. \quad (2.14c)$$

■ 若考慮地表邊界完全不透水

則地表之滲流邊界條件可表為：

$$\frac{d\tilde{P}(0; \xi, s)}{dz} = 0. \quad (2.14d)$$

茲再對式(2.10a)-(2.10c)所示之無限深遠處 ($z \rightarrow \infty$) 邊界條件中的變數 r 分別作 1 階、0 階、0 階之 Hankel 積分轉換後可得：

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{U}_r(z; \xi, s) = 0, \quad (2.15a)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{U}_z(z; \xi, s) = 0, \quad (2.15b)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{P}(z; \xi, s) = 0. \quad (2.15c)$$

式(2.14a)-(2.14d)與式(2.15a)-(2.15c)中之符號 \tilde{U}_r 、 \tilde{U}_z 、 \tilde{P} 的定義如式(2.12a)-(2.12c)所示。

2-3-3 齊性解的解析

式(2.11a)-(2.11c)為聯立之非齊性常微分方程式，其通解包含齊性解 (Homogeneous Solution) 與非齊性解 (Non-homogeneous Solution)，這兩部分的解均可依據傳統的微分方程解析技巧推求其解。基於此，式(2.11a)-(2.11c)的齊性解可假設為：

$$\begin{Bmatrix} \tilde{U}_{rh} \\ \tilde{U}_{zh} \\ \tilde{P}_h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \exp(\lambda z), \quad (2.16)$$

其中 $\{x_1 \ x_2 \ x_3\}^T$ 是特徵向量(Eigenvector)； λ 為特徵根(Eigenvalue)。將式(2.16)代入式(2.11a)-(2.11c)之齊性微分方程式部分（不考慮 \tilde{Q} 的影響），可得問題之特徵方程式 (Characteristic Equation) 如以下所示：

$$(\lambda^2 - \xi^2)^2 \left(\frac{k_r}{\gamma_w} \xi^2 + n\beta s - \frac{k_z}{\gamma_w} \lambda^2 \right) = 0. \quad (2.17)$$

解析式(2.17)可得問題之六個特徵根 λ 分別為：

$$\lambda = \pm \xi, \pm \xi, \pm \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}, \quad (2.18)$$

其中符號 $c = k_z/n\beta\gamma_w$ 。根據所推導出之特徵根，可得出問題之齊性解 U_{rh} 、 U_{zh} 、 P_h 如以下所示：

$$\tilde{U}_{rh}(z; \xi, s) = A_1 e^{\xi z} + A_2 z e^{\xi z} + A_3 e^{-\xi z} + A_4 z e^{-\xi z} + A_5 e^{\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} z} + A_6 e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} z}, \quad (2.19a)$$

$$\tilde{U}_{zh}(z; \xi, s) = B_1 e^{\xi z} + B_2 z e^{\xi z} + B_3 e^{-\xi z} + B_4 z e^{-\xi z} + B_5 e^{\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} z} + B_6 e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} z}, \quad (2.19b)$$

$$\tilde{P}_h(z; \xi, s) = C_1 e^{\xi z} + C_2 z e^{\xi z} + C_3 e^{-\xi z} + C_4 z e^{-\xi z} + C_5 e^{\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} z} + C_6 e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} z}, \quad (2.19c)$$

其中係數 $A_i (i=1, \dots, 6)$ 、 $B_i (i=1, \dots, 6)$ 、 $C_i (i=1, \dots, 6)$ 僅六個是線性獨立的，其係數間之彼此關係可由式(2.19a)-(2.19c)需滿足式(2.11a)-(2.11c)之聯立齊性微分

方程式推導出。經仔細研討並選擇係數 $A_i (i=1, \dots, 6)$ 為線性獨立之常數後，式 (2.19a)-(2.19c) 可表為：

$$\tilde{U}_{rh}(z; \xi, s) = A_1 e^{\xi z} + A_2 z e^{\xi z} + A_3 e^{-\xi z} + A_4 z e^{-\xi z} + A_5 e^{\sqrt{\frac{k_r \xi^2 + s}{k_z}} z} + A_6 e^{-\sqrt{\frac{k_r \xi^2 + s}{k_z}} z}, \quad (2.20a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{zh}(z; \xi, s) = & \left(-A_1 + \frac{2\eta+1}{2\eta-1} \frac{1}{\xi} A_2 \right) e^{\xi z} - A_2 z e^{\xi z} + \left(A_3 + \frac{2\eta+1}{2\eta-1} \frac{1}{\xi} A_4 \right) e^{-\xi z} + A_4 z e^{-\xi z} \\ & - \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{k_r \xi^2 + s}{k_z}} A_5 e^{\sqrt{\frac{k_r \xi^2 + s}{k_z}} z} + \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{k_r \xi^2 + s}{k_z}} A_6 e^{-\sqrt{\frac{k_r \xi^2 + s}{k_z}} z}, \end{aligned} \quad (2.20b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_h(z; \xi, s) = & -2\eta G \frac{1}{\xi} \left(\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c} - \xi^2 \right) A_5 e^{\sqrt{\frac{k_r \xi^2 + s}{k_z}} z} \\ & - 2\eta G \frac{1}{\xi} \left(\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c} - \xi^2 \right) A_6 e^{-\sqrt{\frac{k_r \xi^2 + s}{k_z}} z}. \end{aligned} \quad (2.20c)$$

式(2.20a)-(2.20c)是問題之齊性解，而通解需包含齊性解與非齊性解兩部分，下一單元會繼續說明非齊性解的解析過程。關於待定係數 $A_i (i=1, \dots, 6)$ 之解析結果，需等非齊性解研討出之後，再由所建立之通解滿足問題之邊界條件推導出。

2-3-4 非齊性解的解析

本研究擬引用 Fourier 積分轉換方法解析出問題的非齊性解。若對式 (2.11a)-(2.11c) 中之變數 z 繼續進行 Fourier 積分轉換，則可研討出非齊性解 (Non-homogeneous Solution)。茲定義 \tilde{U}_r 、 \tilde{U}_z 、 \tilde{P} 之 Fourier 積分轉換分別為：

$$\tilde{U}_r^*(\xi, \omega, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_r(z; \xi, s) e^{-i\omega z} dz, \quad (2.21a)$$

$$\tilde{U}_z^*(\xi, \omega, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_z(z; \xi, s) e^{-i\omega z} dz, \quad (2.21b)$$

$$\tilde{P}^*(\xi, \omega, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}(z; \xi, s) e^{-i\omega z} dz, \quad (2.21c)$$

其中符號 ω 定義為 Fourier 積分轉換參數。 \tilde{U}_r^* 、 \tilde{U}_z^* 、 \tilde{P}^* 之 Fourier 反轉換則定義為：

$$\tilde{U}_r(z; \xi, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_r^*(\xi, \omega, s) e^{i\omega z} d\omega, \quad (2.21a^*)$$

$$\tilde{U}_z(z; \xi, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_z^*(\xi, \omega, s) e^{i\omega z} d\omega, \quad (2.21b^*)$$

$$\tilde{P}(z; \xi, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}^*(\xi, \omega, s) e^{i\omega z} d\omega. \quad (2.21c^*)$$

基於此，對式(2.11a)-(2.11c)中之變數 z 進行 Fourier 積分轉換，則可得聯立之代數方程式如以下所示：

$$-(\omega^2 + 2\eta\xi^2)\tilde{U}_r^* - i(2\eta - 1)\omega\xi\tilde{U}_z^* + \frac{1}{G}\xi\tilde{P}^* = 0, \quad (2.22a)$$

$$i(2\eta - 1)\xi\omega\tilde{U}_r^* - (2\eta\omega^2 + \xi^2)\tilde{U}_z^* - i\frac{1}{G}\omega\tilde{P}^* = 0, \quad (2.22b)$$

$$\frac{k_z}{\gamma_w} \left(\frac{k_r}{k_z}\xi^2 + \omega^2 + \frac{s}{c} \right) \tilde{P}^* + \tilde{Q}^* = 0, \quad (2.22c)$$

其中 $\tilde{Q}^*(\xi, \omega, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Q}(z; \xi, s) e^{-i\omega z} dz$ 。式(2.22c)中之抽水作用源 \tilde{Q}^* 包含以下兩種情況：

■ 穩定速率抽水情況

$$\tilde{Q}^*(\xi, \omega, s) = \frac{Q_c}{2\pi s} e^{-i\omega h}. \quad (2.23a)$$

■ 瞬時抽水情況

$$\tilde{Q}^*(\xi, \omega, s) = \frac{Q_0}{2\pi} e^{-i\omega h}. \quad (2.23b)$$

基於所考慮的問題包含穩定速率抽水與瞬時抽水兩種情況，故關於非齊性解 \tilde{U}_{rp} 、 \tilde{U}_{zp} 、 \tilde{P}_p 的解析結果亦包括以下兩種情況。

■ 穩定速率抽水情況

$$\tilde{U}_{rp}^*(\xi, \omega, s) = -\frac{Q_c \gamma_w}{4\pi\eta G k_z s} \frac{\xi e^{-i\omega h}}{(\omega^2 + \xi^2) \left(\frac{k_r}{k_z}\xi^2 + \omega^2 + \frac{s}{c} \right)}, \quad (2.24a)$$

$$\tilde{U}_{zp}^*(\xi, \omega, s) = \frac{Q_c \gamma_w}{4\pi\eta G k_z s} \frac{i\omega e^{-i\omega h}}{(\omega^2 + \xi^2) \left(\frac{k_r}{k_z}\xi^2 + \omega^2 + \frac{s}{c} \right)}, \quad (2.24b)$$

$$\tilde{P}_p^*(\xi, \omega, s) = -\frac{Q_c \gamma_w}{2\pi k_z s} \frac{e^{-i\omega h}}{\frac{k_r}{k_z}\xi^2 + \omega^2 + \frac{s}{c}}. \quad (2.24c)$$

■ 瞬時抽水情況

$$\tilde{U}_{rp}^*(\xi, \omega, s) = -\frac{Q_0 \gamma_w}{4\pi\eta G k_z} \frac{\xi e^{-i\omega h}}{(\omega^2 + \xi^2) \left(\frac{k_r}{k_z}\xi^2 + \omega^2 + \frac{s}{c} \right)}, \quad (2.25a)$$

$$\tilde{U}_{zp}^*(\xi, \omega, s) = \frac{Q_0 \gamma_w}{4\pi\eta G k_z} \frac{i\omega e^{-i\omega h}}{\left(\omega^2 + \xi^2\right) \left(\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \omega^2 + \frac{s}{c}\right)}, \quad (2.25b)$$

$$\tilde{P}_p^*(\xi, \omega, s) = -\frac{Q_0 \gamma_w}{2\pi k_z} \frac{e^{-i\omega h}}{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \omega^2 + \frac{s}{c}}. \quad (2.25c)$$

茲再引用式(2.21a*)-(2.21c*)，對式(2.24a)-(2.24c)與(2.25a)-(2.25c)作 Fourier 積分反轉換，配合數學手冊之使用[71]，可得 $(z; \xi, s)$ 定義域之非齊性解如以下所示。

■ 穩定速率抽水情況

$$\tilde{U}_{rp}(z; \xi, s) = -\frac{Q_c \gamma_w}{8\pi\eta G k_z s} \frac{1}{\left(\frac{k_r}{k_z} - 1\right) \xi^2 + \frac{s}{c}} \left\{ e^{-\xi|z-h|} - \frac{\xi}{\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}} e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}|z-h|} \right\}, \quad (2.26a)$$

$$\tilde{U}_{zp}(z; \xi, s) = \mp \frac{Q_c \gamma_w}{8\pi\eta G k_z s} \frac{1}{\left(\frac{k_r}{k_z} - 1\right) \xi^2 + \frac{s}{c}} \left\{ e^{-\xi|z-h|} - e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}|z-h|} \right\}, \quad (2.26b)$$

$$\tilde{P}_p(z; \xi, s) = -\frac{Q_c \gamma_w}{4\pi k_z s} \frac{1}{\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}} e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}|z-h|}, \quad (2.26c)$$

式(2.26b)中加減符號之上標表 $z-h \geq 0$ ，下標表 $z-h < 0$ 。

■ 瞬時抽水情況

$$\tilde{U}_{rp}(z; \xi, s) = -\frac{Q_0 \gamma_w}{8\pi\eta G k_z} \frac{1}{\left(\frac{k_r}{k_z} - 1\right) \xi^2 + \frac{s}{c}} \left\{ e^{-\xi|z-h|} - \frac{\xi}{\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}} e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}|z-h|} \right\}, \quad (2.27a)$$

$$\tilde{U}_{zp}(z; \xi, s) = \mp \frac{Q_0 \gamma_w}{8\pi\eta G k_z} \frac{1}{\left(\frac{k_r}{k_z} - 1\right) \xi^2 + \frac{s}{c}} \left\{ e^{-\xi|z-h|} - e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}|z-h|} \right\}, \quad (2.27b)$$

$$\tilde{P}_p(z; \xi, s) = -\frac{Q_0 \gamma_w}{4\pi k_z} \frac{1}{\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}} e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}|z-h|}, \quad (2.27c)$$

同理，式(2.27b)中加減符號之上標表 $z-h \geq 0$ ，下標表 $z-h < 0$ 。

2-3-5 (z, ξ, s) 定義域之特解

式(2.20a)-(2.20c)表(z, ξ, s)定義域之齊性解，式(2.26a)-(2.26c)表(z, ξ, s)定義域於穩定速率抽水情況下之非齊性解，式(2.27a)-(2.27c)則表(z, ξ, s)定義域於瞬時抽水情況下之非齊性解，將齊性解與非齊性解相加，即為問題之通解。再將通解代入式(2.14a)-(2.14d)與式(2.15a)-(2.15c)所示之邊界條件，即可研討出滿足邊界條件之特解。

因本研究所考慮的抽水作用源包含穩定速率抽水與瞬時抽水兩種情況，且地表滲流邊界條件是考慮為透水與不透水兩種條件，為清楚起見，擬將(z, ξ, s)定義域之特解區分為以下四種情況，說明如下。

■ 穩定速率抽水且地表模擬為透水情況下

$$\begin{aligned} \tilde{U}_r(z, \xi, s) = & \frac{Q_c \gamma_w}{8\pi\eta G k_z s} \frac{1}{\left(\frac{k_r}{k_z} - 1\right) \xi^2 + \frac{s}{c}} \left\{ \left(-\frac{2\eta+1}{2\eta-1} + 2\xi z \right) e^{-\xi(z+h)} \right. \\ & + \left(\frac{4\eta}{2\eta-1} - 2\xi z \right) e^{-\left(\xi z + \sqrt{\frac{k_r \xi^2 + s}{k_z} h}\right)} - \xi \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}^{-1} e^{-\sqrt{\frac{k_r \xi^2 + s}{k_z} (z+h)}} \\ & \left. - e^{-\xi|z-h|} + \xi \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}^{-1} e^{-\sqrt{\frac{k_r \xi^2 + s}{k_z} |z-h|}} \right\}, \end{aligned} \quad (2.28a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_z(z, \xi, s) = & \frac{Q_c \gamma_w}{8\pi\eta G k_z s} \frac{1}{\left(\frac{k_r}{k_z} - 1\right) \xi^2 + \frac{s}{c}} \left\{ \left(\frac{2\eta+1}{2\eta-1} + 2\xi z \right) e^{-\xi(z+h)} \right. \\ & \left. - \left(\frac{2}{2\eta-1} + 2\xi z \right) e^{-\left(\xi z + \sqrt{\frac{k_r \xi^2 + s}{k_z} h}\right)} - e^{-\sqrt{\frac{k_r \xi^2 + s}{k_z} (z+h)}} \mp e^{-\xi|z-h|} \pm e^{-\sqrt{\frac{k_r \xi^2 + s}{k_z} |z-h|}} \right\}, \end{aligned} \quad (2.28b)$$

$$\tilde{P}(z, \xi, s) = -\frac{Q_c \gamma_w}{4\pi k_z s} \frac{1}{\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}} \left\{ -e^{-\sqrt{\frac{k_r \xi^2 + s}{k_z} (z+h)}} + e^{-\sqrt{\frac{k_r \xi^2 + s}{k_z} |z-h|}} \right\}, \quad (2.28c)$$

式(2.28b)中加減符號之上標表 $z-h \geq 0$ 的情況，下標表 $z-h < 0$ 的情況。

■ 穩定速率抽水且地表模擬為不透水情況下

$$\tilde{U}_r(z, \xi, s) = \frac{Q_c \gamma_w}{8\pi\eta G k_z s} \frac{1}{\left(\frac{k_r}{k_z} - 1\right) \xi^2 + \frac{s}{c}} \left\{ \left(-\frac{2\eta+1}{2\eta-1} + 2\xi z \right) e^{-\xi(z+h)} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{2\eta}{2\eta-1} \frac{1}{\xi} - 2\eta z \right) \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} e^{-\left(\xi z + \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} h \right)} + \xi \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}^{-1} e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} (z+h)} \\
& + 2(\eta-1) \left(-\frac{1}{2\eta-1} \xi + \xi^2 z \right) \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}^{-1} e^{-\left(\xi z + \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} h \right)} \\
& - e^{-\xi|z-h|} + \xi \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}^{-1} e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} |z-h|} \left. \right\}, \quad (2.29a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_z(z; \xi, s) &= \frac{Q_c \gamma_w}{8\pi\eta G k_z s} \frac{1}{\left(\frac{k_r}{k_z} - 1 \right) \xi^2 + \frac{s}{c}} \left\{ \left(\frac{2\eta+1}{2\eta-1} + 2\xi z \right) e^{-\xi(z+h)} \right. \\
& - \left(\frac{4\eta^2}{2\eta-1} \frac{1}{\xi} + 2\eta z \right) \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} e^{-\left(\xi z + \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} h \right)} \\
& + 2(\eta-1) \left(\frac{2\eta}{2\eta-1} \xi + \xi^2 z \right) \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}^{-1} e^{-\left(\xi z + \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} h \right)} \\
& \left. + e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} (z+h)} \mp e^{-\xi|z-h|} \pm e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} |z-h|} \right\}, \quad (2.29b)
\end{aligned}$$

$$\tilde{P}(z; \xi, s) = -\frac{Q_c \gamma_w}{4\pi k_z s} \frac{1}{\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}} \left\{ e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} (z+h)} + e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} |z-h|} \right\}, \quad (2.29c)$$

同理，式(2.29b)中加減符號之上標表 $z-h \geq 0$ 的情況，下標表 $z-h < 0$ 的情況。

■ 瞬時抽水且地表模擬為透水情況下

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_r(z; \xi, s) &= \frac{Q_0 \gamma_w}{8\pi\eta G k_z} \frac{1}{\left(\frac{k_r}{k_z} - 1 \right) \xi^2 + \frac{s}{c}} \left\{ \left(-\frac{2\eta+1}{2\eta-1} + 2\xi z \right) e^{-\xi(z+h)} \right. \\
& + \left(\frac{4\eta}{2\eta-1} - 2\xi z \right) e^{-\left(\xi z + \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} h \right)} - \xi \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}^{-1} e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} (z+h)} \\
& \left. - e^{-\xi|z-h|} + \xi \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}^{-1} e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} |z-h|} \right\}, \quad (2.30a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_z(z; \xi, s) &= \frac{Q_0 \gamma_w}{8\pi\eta G k_z} \frac{1}{\left(\frac{k_r}{k_z} - 1 \right) \xi^2 + \frac{s}{c}} \left\{ \left(\frac{2\eta+1}{2\eta-1} + 2\xi z \right) e^{-\xi(z+h)} \right. \\
& - \left(\frac{2}{2\eta-1} + 2\xi z \right) e^{-\left(\xi z + \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} h \right)} - e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} (z+h)} \\
& \left. \mp e^{-\xi|z-h|} \pm e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} |z-h|} \right\}, \quad (2.30b)
\end{aligned}$$

$$\tilde{P}(z; \xi, s) = -\frac{Q_0 \gamma_w}{4\pi k_z} \frac{1}{\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}} \left\{ -e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}(z+h)} + e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}|z-h|} \right\}, \quad (2.30c)$$

同理，式(2.30b)中加減符號之上標表 $z-h \geq 0$ 的情況，下標表 $z-h < 0$ 的情況。

■ 瞬時抽水且地表模擬為不透水情況下

$$\begin{aligned} \tilde{U}_r(z; \xi, s) = & \frac{Q_0 \gamma_w}{8\pi\eta G k_z} \frac{1}{\left(\frac{k_r}{k_z} - 1\right) \xi^2 + \frac{s}{c}} \left\{ \left(-\frac{2\eta+1}{2\eta-1} + 2\xi z \right) e^{-\xi(z+h)} \right. \\ & + \left(\frac{2\eta}{2\eta-1} \frac{1}{\xi} - 2\eta z \right) \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} e^{-\left(\xi z + \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} h\right)} + \xi \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}^{-1} e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}(z+h)} \\ & + 2(\eta-1) \left(-\frac{1}{2\eta-1} \xi + \xi^2 z \right) \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}^{-1} e^{-\left(\xi z + \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} h\right)} \\ & \left. - e^{-\xi|z-h|} + \xi \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}^{-1} e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}|z-h|} \right\}, \quad (2.31a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_z(z; \xi, s) = & \frac{Q_0 \gamma_w}{8\pi\eta G k_z} \frac{1}{\left(\frac{k_r}{k_z} - 1\right) \xi^2 + \frac{s}{c}} \left\{ \left(\frac{2\eta+1}{2\eta-1} + 2\xi z \right) e^{-\xi(z+h)} \right. \\ & - \left(\frac{4\eta^2}{2\eta-1} \frac{1}{\xi} + 2\eta z \right) \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} e^{-\left(\xi z + \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} h\right)} \\ & + 2(\eta-1) \left(\frac{2\eta}{2\eta-1} \xi + \xi^2 z \right) \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}^{-1} e^{-\left(\xi z + \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} h\right)} \\ & \left. + e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}(z+h)} \mp e^{-\xi|z-h|} \pm e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}|z-h|} \right\}, \quad (2.31b) \end{aligned}$$

$$\tilde{P}(z; \xi, s) = -\frac{Q_0 \gamma_w}{4\pi k_z} \frac{1}{\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}} \left\{ e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}(z+h)} + e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}|z-h|} \right\}, \quad (2.31c)$$

同理，式(2.31b)中加減符號之上標表 $z-h \geq 0$ 的情況，下標表 $z-h < 0$ 的情況。

本研究最有興趣的是探討抽水所引致之地表沉陷及水平位移，另外，亦擬探討抽水所引致之含水層超額孔隙水壓的變化。基於此，關於地表沉陷量及水平位移的探討，可分別令式(2.28a)-(2.28b)、(2.29a)-(2.29b)、(2.30a)-(2.30b)、(2.31a)-(2.31b)中之空間變數 $z=0$ ；另外，為清楚起見，擬將式(2.28c)、(2.29c)、(2.30c)、(2.31c)所示之超額孔隙水壓分組列示如後，說明如下。

■ 穩定速率抽水且地表模擬為透水情況

$$\tilde{U}_r(0; \xi, s) = \frac{Q_c \gamma_w}{2(2\eta - 1)\pi G k_z s} \frac{1}{\left(\frac{k_r}{k_z} - 1\right) \xi^2 + \frac{s}{c}} \left\{ -e^{-\xi h} + e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} h} \right\}, \quad (2.32a)$$

$$\tilde{U}_z(0; \xi, s) = \frac{Q_c \gamma_w}{2(2\eta - 1)\pi G k_z s} \frac{1}{\left(\frac{k_r}{k_z} - 1\right) \xi^2 + \frac{s}{c}} \left\{ e^{-\xi h} - e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} h} \right\}, \quad (2.32b)$$

$$\tilde{P}(z; \xi, s) = -\frac{Q_c \gamma_w}{4\pi k_z s} \frac{1}{\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}} \left\{ -e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}(z+h)} + e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}|z-h|} \right\}. \quad (2.28c)$$

■ 穩定速率抽水且地表模擬為不透水情況

$$\tilde{U}_r(0; \xi, s) = \frac{Q_c \gamma_w}{2(2\eta - 1)\pi G k_z s} \frac{1}{\left(\frac{k_r}{k_z} - 1\right) \xi^2 + \frac{s}{c}} \left\{ -e^{-\xi h} + \frac{1}{2\xi} \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} h} \right. \\ \left. + \frac{\xi}{2} \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}^{-1} e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} h} \right\}, \quad (2.33a)$$

$$\tilde{U}_z(0; \xi, s) = \frac{Q_c \gamma_w}{2(2\eta - 1)\pi G k_z s} \frac{1}{\left(\frac{k_r}{k_z} - 1\right) \xi^2 + \frac{s}{c}} \left\{ e^{-\xi h} - \eta \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} h} \right. \\ \left. + (\eta - 1) \xi \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}^{-1} e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} h} \right\}, \quad (2.33b)$$

$$\tilde{P}(z; \xi, s) = -\frac{Q_c \gamma_w}{4\pi k_z s} \frac{1}{\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}} \left\{ e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}(z+h)} + e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}|z-h|} \right\}. \quad (2.29c)$$

■ 瞬時抽水且地表模擬為透水情況

$$\tilde{U}_r(0; \xi, s) = \frac{Q_0 \gamma_w}{2(2\eta - 1)\pi G k_z} \frac{1}{\left(\frac{k_r}{k_z} - 1\right) \xi^2 + \frac{s}{c}} \left\{ -e^{-\xi h} + e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} h} \right\}, \quad (2.34a)$$

$$\tilde{U}_z(0; \xi, s) = \frac{Q_0 \gamma_w}{2(2\eta - 1)\pi G k_z} \frac{1}{\left(\frac{k_r}{k_z} - 1\right) \xi^2 + \frac{s}{c}} \left\{ e^{-\xi h} - e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} h} \right\}, \quad (2.34b)$$

$$\tilde{P}(z; \xi, s) = -\frac{Q_0 \gamma_w}{4\pi k_z} \frac{1}{\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}} \left\{ -e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}(z+h)} + e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}|z-h|} \right\}. \quad (2.30c)$$

■ 瞬時抽水且地表模擬為不透水情況

$$\begin{aligned} \tilde{U}_r(0; \xi, s) = & \frac{Q_0 \gamma_w}{2(2\eta-1)\pi G k_z} \frac{1}{\left(\frac{k_r}{k_z}-1\right)\xi^2 + \frac{s}{c}} \left\{ -e^{-\xi h} + \frac{1}{2\xi} \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}h} \right. \\ & \left. + \frac{\xi}{2} \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}^{-1} e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}h} \right\}, \end{aligned} \quad (2.35a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_z(0; \xi, s) = & \frac{Q_0 \gamma_w}{2(2\eta-1)\pi G k_z} \frac{1}{\left(\frac{k_r}{k_z}-1\right)\xi^2 + \frac{s}{c}} \left\{ e^{-\xi h} - \eta \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}} e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}h} \right. \\ & \left. + (\eta-1) \xi \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}^{-1} e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}h} \right\}, \end{aligned} \quad (2.35b)$$

$$\tilde{P}(z; \xi, s) = -\frac{Q_0 \gamma_w}{4\pi k_z} \frac{1}{\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}} \left\{ e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}(z+h)} + e^{-\sqrt{\frac{k_r}{k_z} \xi^2 + \frac{s}{c}}|z-h|} \right\}. \quad (2.31c)$$

若進一步考慮等向性滲流條件，即 $k_r = k_z = k$ ，其中 k 表等向性滲流係數，則式(2.32a)-(2.32b)、(2.28c)、(2.33a)-(2.33b)、(2.29c)、(2.34a)-(2.34b)、(2.30c)、(2.35a)-(2.35b)、(2.31c)可分別改寫為：

■ 穩定速率抽水、地表模擬為透水情況且考慮 $k_r = k_z = k$

$$\tilde{U}_r(0; \xi, s) = \frac{Q_c \gamma_w}{2(2\eta-1)\pi G k s^2} \left\{ -e^{-\xi h} + e^{-\sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}}h} \right\}, \quad (2.36a)$$

$$\tilde{U}_z(0; \xi, s) = \frac{Q_c \gamma_w}{2(2\eta-1)\pi G k s^2} \left\{ e^{-\xi h} - e^{-\sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}}h} \right\}, \quad (2.36b)$$

$$\tilde{P}(z; \xi, s) = -\frac{Q_c \gamma_w}{4\pi k s} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}}} \left\{ -e^{-\sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}}(z+h)} + e^{-\sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}}|z-h|} \right\}. \quad (2.36c)$$

■ 穩定速率抽水、地表模擬為不透水情況且考慮 $k_r = k_z = k$

$$\tilde{U}_r(0; \xi, s) = \frac{Q_c \gamma_w}{2(2\eta-1)\pi G k s^2} \left\{ -e^{-\xi h} + \frac{1}{2\xi} \sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}} e^{-\sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}}h} \right\}$$

$$\left. + \frac{\xi}{2} \sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}}^{-1} e^{-\sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}} h} \right\}, \quad (2.37a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_z(0; \xi, s) = \frac{Q_c \gamma_w}{2(2\eta-1)\pi Gk} \frac{c}{s^2} & \left\{ e^{-\xi h} - \eta \frac{1}{\xi} \sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}} e^{-\sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}} h} \right. \\ & \left. + (\eta-1) \xi \sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}}^{-1} e^{-\sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}} h} \right\}, \quad (2.37b) \end{aligned}$$

$$\tilde{P}(z; \xi, s) = -\frac{Q_c \gamma_w}{4\pi k s} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}}} \left\{ e^{-\sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}}(z+h)} + e^{-\sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}}|z-h|} \right\}. \quad (2.37c)$$

■ 瞬時抽水、地表模擬為透水情況且考慮 $k_r = k_z = k$

$$\tilde{U}_r(0; \xi, s) = \frac{Q_0 \gamma_w}{2(2\eta-1)\pi Gk} \frac{c}{s} \left\{ -e^{-\xi h} + e^{-\sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}} h} \right\}, \quad (2.38a)$$

$$\tilde{U}_z(0; \xi, s) = \frac{Q_0 \gamma_w}{2(2\eta-1)\pi Gk} \frac{c}{s} \left\{ e^{-\xi h} - e^{-\sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}} h} \right\}, \quad (2.38b)$$

$$\tilde{P}(z; \xi, s) = -\frac{Q_0 \gamma_w}{4\pi k} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}}} \left\{ -e^{-\sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}}(z+h)} + e^{-\sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}}|z-h|} \right\}. \quad (2.38c)$$

■ 瞬時抽水、地表模擬為不透水情況且考慮 $k_r = k_z = k$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_r(0; \xi, s) = \frac{Q_0 \gamma_w}{2(2\eta-1)\pi Gk} \frac{c}{s} & \left\{ -e^{-\xi h} + \frac{1}{2\xi} \sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}} e^{-\sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}} h} \right. \\ & \left. + \frac{\xi}{2} \sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}}^{-1} e^{-\sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}} h} \right\}, \quad (2.39a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_z(0; \xi, s) = \frac{Q_0 \gamma_w}{2(2\eta-1)\pi Gk} \frac{c}{s} & \left\{ e^{-\xi h} - \eta \frac{1}{\xi} \sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}} e^{-\sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}} h} \right. \\ & \left. + (\eta-1) \xi \sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}}^{-1} e^{-\sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}} h} \right\}, \quad (2.39b) \end{aligned}$$

$$\tilde{P}(z; \xi, s) = -\frac{Q_0 \gamma_w}{4\pi k} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}}} \left\{ e^{-\sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}}(z+h)} + e^{-\sqrt{\xi^2 + \frac{s}{c}}|z-h|} \right\}. \quad (2.39c)$$

2-3-6 實數域 (r, z, t) 之特解

引用式(2.7a*)-(2.7b*)與式(2.12a*)-(2.12b*)，分別對式(2.36a)-(2.36c)、(2.37a)-(2.37c)、(2.38a)-(2.38c)、(2.39a)-(2.39c)作 Laplace 反轉換與 Hankel 反轉

換，並引用適當之數學使用手冊[71]，則可研討出 (r, z, t) 定義域之解，分述如下。

■ 穩定速率抽水、地表模擬為透水情況且考慮 $k_r = k_z = k$

$$u_r(r, 0, t) = \frac{Q_c \gamma_w}{2(2\eta - 1)\pi Gk} \left\{ -\frac{ctr}{(h^2 + r^2)^{3/2}} + \int_0^{ct} \frac{(ct - \tau)hr}{16\tau^3} \exp\left(-\frac{2h^2 + r^2}{8\tau}\right) \cdot \left[I_0\left(\frac{r^2}{8\tau}\right) - I_1\left(\frac{r^2}{8\tau}\right) \right] d\tau \right\}, \quad (2.40a)$$

$$u_z(r, 0, t) = \frac{Q_c \gamma_w}{2(2\eta - 1)\pi Gk} \left\{ \frac{cth}{(h^2 + r^2)^{3/2}} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{2\sqrt{ct}}\right) - \frac{h}{h^2 + r^2} \sqrt{\frac{ct}{\pi}} \exp\left(-\frac{h^2 + r^2}{4ct}\right) + \frac{h}{2\sqrt{h^2 + r^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{2\sqrt{ct}}\right) \right\}, \quad (2.40b)$$

$$p(r, z, t) = \frac{Q_c \gamma_w}{4\pi k} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+h)^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{r^2 + (z+h)^2}}{2\sqrt{ct}}\right) - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}}{2\sqrt{ct}}\right) \right\}. \quad (2.40c)$$

■ 穩定速率抽水、地表模擬為不透水情況且考慮 $k_r = k_z = k$

$$u_r(r, 0, t) = \frac{Q_c \gamma_w}{2(2\eta - 1)\pi Gk} \left\{ -\frac{ctr}{(h^2 + r^2)^{3/2}} + \frac{1}{2} \int_0^{ct} (ct - \tau) \left(\frac{h^2}{8\tau^3} - \frac{1}{4\tau^2} \right) \exp\left(-\frac{r^2 + 2h^2}{8\tau}\right) I_{\frac{1}{2}}\left(\frac{r^2}{8\tau}\right) d\tau + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{ctr}{(h^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{r}{2\sqrt{h^2 + r^2}} \right) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{h^2 + r^2}{4ct}}\right) + \frac{r\sqrt{ct}}{\sqrt{\pi}(h^2 + r^2)} \exp\left(-\frac{h^2 + r^2}{4ct}\right) \right] \right\}, \quad (2.41a)$$

$$u_z(r, 0, t) = \frac{Q_c \gamma_w}{2(2\eta - 1)\pi Gk} \left\{ \frac{cth}{(h^2 + r^2)^{3/2}} - \eta \int_0^{ct} (ct - \tau) \left(\frac{h^2}{8\tau^3} - \frac{1}{4\tau^2} \right) \exp\left(-\frac{r^2 + 2h^2}{8\tau}\right) I_0\left(\frac{r^2}{8\tau}\right) d\tau + (\eta - 1) \int_0^{ct} (ct - \tau) \left[\frac{1}{4\tau^2} I_0\left(\frac{r^2}{8\tau}\right) \right] \right\}$$

$$\left. + \frac{r^2}{16\tau^3} \left(I_1 \left(\frac{r^2}{8\tau} \right) - I_0 \left(\frac{r^2}{8\tau} \right) \right) \exp \left(-\frac{r^2 + 2h^2}{8\tau} \right) d\tau \right\}, \quad (2.41b)$$

$$p(r, z, t) = \frac{Q_c \gamma_w}{4\pi k} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+h)^2}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{r^2 + (z+h)^2}}{2\sqrt{ct}} \right) - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}}{2\sqrt{ct}} \right) \right\}. \quad (2.41c)$$

■ 瞬時抽水、地表模擬為透水情況且考慮 $k_r = k_z = k$

$$u_r(r, 0, t) = \frac{Q_0 \gamma_w}{2(2\eta - 1)\pi Gk} \left\{ -\frac{cr}{(h^2 + r^2)^{3/2}} + \int_0^{ct} \frac{chr}{16\tau^3} \exp \left(-\frac{r^2 + 2h^2}{8\tau} \right) \left[I_0 \left(\frac{r^2}{8\tau} \right) - I_1 \left(\frac{r^2}{8\tau} \right) \right] d\tau \right\}, \quad (2.42a)$$

$$u_z(r, 0, t) = \frac{Q_0 \gamma_w}{2(2\eta - 1)\pi Gk} \left\{ \frac{ch}{(h^2 + r^2)^{3/2}} \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{2\sqrt{ct}} \right) - \frac{ch}{h^2 + r^2} \frac{1}{\sqrt{\pi ct}} \exp \left(-\frac{h^2 + r^2}{4ct} \right) \right\}, \quad (2.42b)$$

$$p(r, z, t) = \frac{Q_0 \gamma_w}{8\pi k} \frac{1}{\sqrt{\pi ct^3}} \left\{ \exp \left(-\frac{r^2 + (z+h)^2}{4ct} \right) - \exp \left(-\frac{r^2 + (z-h)^2}{4ct} \right) \right\}. \quad (2.42c)$$

■ 瞬時抽水、地表模擬為不透水情況且考慮 $k_r = k_z = k$

$$u_r(r, 0, t) = \frac{Q_0 \gamma_w}{2(2\eta - 1)\pi Gk} \left\{ -\frac{cr}{(h^2 + r^2)^{3/2}} + \frac{c}{2} \int_0^{ct} \left(\frac{h^2}{8\tau^3} - \frac{1}{4\tau^2} \right) \exp \left(-\frac{r^2 + 2h^2}{8\tau} \right) I_{\frac{1}{2}} \left(\frac{r^2}{8\tau} \right) d\tau + \frac{c}{2} \int_0^{ct} \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{r}{\tau^{5/2}} \exp \left(-\frac{r^2 + h^2}{4\tau} \right) d\tau \right\}, \quad (2.43a)$$

$$u_z(r, 0, t) = \frac{Q_0 \gamma_w}{2(2\eta - 1)\pi Gk} \left\{ \frac{ch}{(h^2 + r^2)^{3/2}} - c\eta \int_0^{ct} \left(\frac{h^2}{8\tau^3} - \frac{1}{4\tau^2} \right) \exp \left(-\frac{r^2 + 2h^2}{8\tau} \right) I_0 \left(\frac{r^2}{8\tau} \right) d\tau + c(\eta - 1) \int_0^{ct} \left[\frac{1}{4\tau^2} I_0 \left(\frac{r^2}{8\tau} \right) \right] d\tau \right\}$$

$$+ \frac{r^2}{16\tau^3} \left(I_1 \left(\frac{r^2}{8\tau} \right) - I_0 \left(\frac{r^2}{8\tau} \right) \right) \exp \left(-\frac{r^2 + 2h^2}{8\tau} \right) d\tau \left. \vphantom{\frac{r^2}{16\tau^3}} \right\} , \quad (2.43b)$$

$$p(r, z, t) = \frac{Q_0 \gamma_w}{8\pi k} \frac{1}{\sqrt{\pi c t^3}} \left\{ -\exp \left(-\frac{r^2 + (z+h)^2}{4ct} \right) - \exp \left(-\frac{r^2 + (z-h)^2}{4ct} \right) \right\} . \quad (2.43c)$$

式(2.40a)-(2.43c)中之符號 $I_n(x)$ 表修正後之 n 階的第一種類型 Bessel 函數； $erf(x)$ 是誤差函數 (Error Function)， $erfc(x)$ 為補誤差函數 (Complementary Error Function)，且 $erfc(x) = 1 - erf(x)$ 。

2-4 數值結果

本研究目前已研討出部分之數值結果，首先探討抽水所引致之地表水平位移 $u_r(r, 0, \infty)$ 、地表長期壓密沉陷量 $u_z(r, 0, \infty)$ 及地層超額孔隙水壓 $p(r, z, \infty)$ 等。在前一單元所描述的四種情況下之考慮， $u_r(r, 0, \infty)$ 、 $u_z(r, 0, \infty)$ 及 $p(r, z, \infty)$ 可分別表述如下。

■ 穩定速率抽水、地表模擬為透水情況且考慮 $k_r = k_z = k$ 時

$$u_r(r, 0, \infty) = -\frac{Q_c \gamma_w}{4(2\eta - 1)\pi Gk} \frac{hr}{\sqrt{h^2 + r^2}(\sqrt{h^2 + r^2} + h)} , \quad (2.44a)$$

$$u_z(r, 0, \infty) = \frac{Q_c \gamma_w}{4(2\eta - 1)\pi Gk} \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} , \quad (2.44b)$$

$$p(r, z, \infty) = \frac{Q_c \gamma_w}{4\pi k} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}} \right\} . \quad (2.44c)$$

■ 穩定速率抽水、地表模擬為不透水情況且考慮 $k_r = k_z = k$ 時

$$u_r(r, 0, \infty) = -\frac{Q_c \gamma_w}{4(2\eta - 1)\pi Gk} \frac{hr}{\sqrt{h^2 + r^2}(\sqrt{h^2 + r^2} + h)} , \quad (2.45a)$$

$$u_z(r, 0, \infty) = \frac{Q_c \gamma_w}{4(2\eta - 1)\pi Gk} \left\{ \frac{1}{2\eta - 1} \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} + \sinh^{-1} \frac{h}{r} \right\} , \quad (2.45b)$$

$$p(r, z, \infty) = \frac{Q_c \gamma_w}{4\pi k} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}} \right\} . \quad (2.45c)$$

■ 瞬時抽水、地表模擬為透水情況且考慮 $k_r = k_z = k$ 時

$$u_r(r, 0, \infty) = 0 , \quad (2.46a)$$

$$u_z(r, 0, \infty) = 0 , \quad (2.46b)$$

$$p(r, z, \infty) = 0 \quad (2.46c)$$

■ 瞬時抽水、地表模擬為不透水情況且考慮 $k_r = k_z = k$ 時

$$u_r(r, 0, \infty) = 0 \quad (2.47a)$$

$$u_z(r, 0, \infty) = 0 \quad (2.47b)$$

$$p(r, z, \infty) = 0 \quad (2.47c)$$

式(2.46a)-(2.47c)所示之地表位移與地層超額孔隙水壓均為零，其原因乃是所考慮之抽水型態為瞬時抽水情況，且含水層是模擬為線彈性多孔介質之故。另外，由式(2.44a)-(2.45c)得知，在穩定速率抽水情況下，長期地表位移與地層超額孔隙水壓會逐漸達到穩態平衡狀況。

另一有趣的現象是，在瞬時抽水情況下，當 $t \rightarrow 0^+$ 時其地表位移會達到最大然後再逐漸遞減，此應與地層固體介質部分之有效應力增加有關，但 $t \rightarrow 0^+$ 時之地層瞬時超額孔隙水壓仍為零；然而，在穩定速率抽水情況下，當 $t \rightarrow 0^+$ 之瞬間情況下，地表位移與地層超額孔隙水壓均為零，其閉合解之結果如以下所示。

■ 穩定速率抽水、地表模擬為透水情況且考慮 $k_r = k_z = k$ 時

$$u_r(r, 0, 0^+) = 0 \quad (2.48a)$$

$$u_z(r, 0, 0^+) = 0 \quad (2.48b)$$

$$p(r, z, 0^+) = 0 \quad (2.48c)$$

■ 穩定速率抽水、地表模擬為不透水情況且考慮 $k_r = k_z = k$ 時

$$u_r(r, 0, 0^+) = 0 \quad (2.49a)$$

$$u_z(r, 0, 0^+) = 0 \quad (2.49b)$$

$$p(r, z, 0^+) = 0 \quad (2.49c)$$

■ 瞬時抽水、地表模擬為透水情況且考慮 $k_r = k_z = k$ 時

$$u_r(r, 0, 0^+) = -\frac{cQ_0\gamma_w}{2(2\eta-1)\pi Gk} \frac{r}{(h^2+r^2)^{3/2}} \quad (2.50a)$$

$$u_z(r, 0, 0^+) = \frac{cQ_0\gamma_w}{2(2\eta-1)\pi Gk} \frac{h}{(h^2+r^2)^{3/2}} \quad (2.50b)$$

$$p(r, z, 0^+) = 0 \quad (2.50c)$$

■ 瞬時抽水、地表模擬為不透水情況且考慮 $k_r = k_z = k$ 時

$$u_r(r, 0, 0^+) = -\frac{cQ_0\gamma_w}{2(2\eta-1)\pi Gk} \frac{r}{(h^2+r^2)^{3/2}}, \quad (2.51a)$$

$$u_z(r, 0, 0^+) = \frac{cQ_0\gamma_w}{2(2\eta-1)\pi Gk} \frac{h}{(h^2+r^2)^{3/2}}, \quad (2.51b)$$

$$p(r, z, 0^+) = 0. \quad (2.51c)$$

基於式(2.44a)-(2.51c)，可進一步研討出各種條件下之地層最大水平位移 $u_{r \max}$ 與最大沉陷量 $u_{z \max}$ ，說明如下。

■ 穩定速率抽水、地表模擬為透水情況且考慮 $k_r = k_z = k$ 時

$$u_{r \max} = u_r(\sqrt{\phi}h, 0, \infty) = -\frac{Q_c\gamma_w}{4(2\eta-1)\pi Gk} \frac{1}{\phi^{2.5}} \approx -\frac{0.3003Q_c\gamma_w}{4(2\eta-1)\pi Gk}, \quad (2.52a)$$

$$u_{z \max} = u_z(0, 0, \infty) = \frac{Q_c\gamma_w}{4(2\eta-1)\pi Gk}. \quad (2.52b)$$

■ 穩定速率抽水、地表模擬為不透水情況且考慮 $k_r = k_z = k$ 時

$$u_{r \max} = u_r(\sqrt{\phi}h, 0, \infty) = -\frac{Q_c\gamma_w}{4(2\eta-1)\pi Gk} \frac{1}{\phi^{2.5}} \approx -\frac{0.3003Q_c\gamma_w}{4(2\eta-1)\pi Gk}, \quad (2.53a)$$

$$u_{z \max} = \lim_{r \rightarrow 0} u_z(r, 0, \infty) = \frac{Q_c\gamma_w}{4(2\eta-1)\pi Gk} \left\{ \frac{1}{2\eta-1} + \lim_{r \rightarrow 0} \sinh^{-1} \frac{h}{r} \right\}. \quad (2.53b)$$

■ 瞬時抽水、地表模擬為透水情況且考慮 $k_r = k_z = k$ 時

$$u_{r \max} = u_r(h/\sqrt{2}, 0, 0^+) = -\frac{\sqrt{3}cQ_0\gamma_w}{9(2\eta-1)\pi Gkh^2}, \quad (2.54a)$$

$$u_{z \max} = u_z(0, 0, 0^+) = \frac{cQ_0\gamma_w}{2(2\eta-1)\pi Gkh^2}. \quad (2.54b)$$

式(2.52a)與式(2.53a)中之符號 ϕ 表黃金比例 (Golden Ratio) [72]，其值為 $\phi = (\sqrt{5}+1)/2 \approx 1.618$ ；另外，關於地表最大水平位移 $u_{r \max}$ 之發生位置，則可由對式(2.44a)、(2.45a)、(2.50a)所示 $u_{r \max}$ 中之變數 r 微分後再令其值為零推導出；而最大沉陷量 $u_{z \max}$ 理應發生在 $r=0$ 之對稱軸位置上。式(2.52a)-(2.54b)之閉合解並不包括瞬時抽水且地表模擬為不透水情況下，地層最大水平位移 $u_{r \max}$ 與最大沉陷量 $u_{z \max}$ 之研討結果，此一部份之研究，並非本計畫案原先所擬訂之研究項目，有待後續之研究完成之。

茲定義平均壓密度 (Average Consolidation Ratio) U 如以下所示：

$$U = \frac{\text{settlement at time } t}{\text{settlement at end of compression}}, \quad (2.55)$$

則可分別研討出以下兩種情況下問題之平均壓密度。

■ 穩定速率抽水、地表模擬為透水情況且考慮 $k_r = k_z = k$ 時

$$U = \frac{2ct}{h^2 + r^2} \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{2\sqrt{ct}} \right) - \frac{2}{\sqrt{h^2 + r^2}} \sqrt{\frac{ct}{\pi}} \exp \left(-\frac{h^2 + r^2}{4ct} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{2\sqrt{ct}} \right) \quad (2.56a)$$

■ 瞬時抽水、地表模擬為透水情況且考慮 $k_r = k_z = k$ 時

$$U = \frac{h^3}{(h^2 + r^2)^{3/2}} \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{2\sqrt{ct}} \right) - \frac{h^3}{h^2 + r^2} \frac{1}{\sqrt{\pi ct}} \exp \left(-\frac{h^2 + r^2}{4ct} \right) \quad (2.56b)$$

圖 2.2 為依據式(2.56a)所繪製之平均壓密度，由圖 2.2 得知，一開始的時候，以穩定速率抽水所引致之壓密沉陷相當快速，但其沉陷速率會逐漸趨於和緩。當壓密完成 80% 時（即 $U = 80\%$ ），所需之無因次化壓密時間 ct/h^2 約為 3.5；理論上，地層要達到最終壓密（Final Consolidation）需無限長的時間。

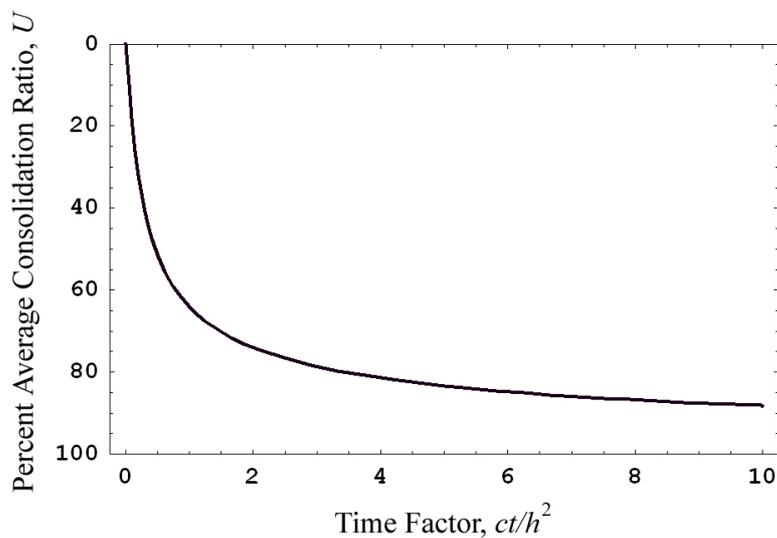


圖 2.2 以穩定速率抽水且地表模擬為透水情況時於 $r = 0$ 位置之平均壓密度 U

圖 2.3 為依據式(2.56b)所繪製之平均壓密度，由圖 2.3 得知，一開始的時候（ $t \rightarrow 0^+$ ），瞬時抽水所引致之壓密沉陷量會達極大值，因所考慮之地層為線彈性之飽和多孔介質，故其沉陷量會逐漸回復。其初始回復速率相當快，但其回復速率會逐漸趨於和緩。當壓密時間 $t \rightarrow \infty$ 時，地層會恢復為未進行瞬時抽水前之情況。

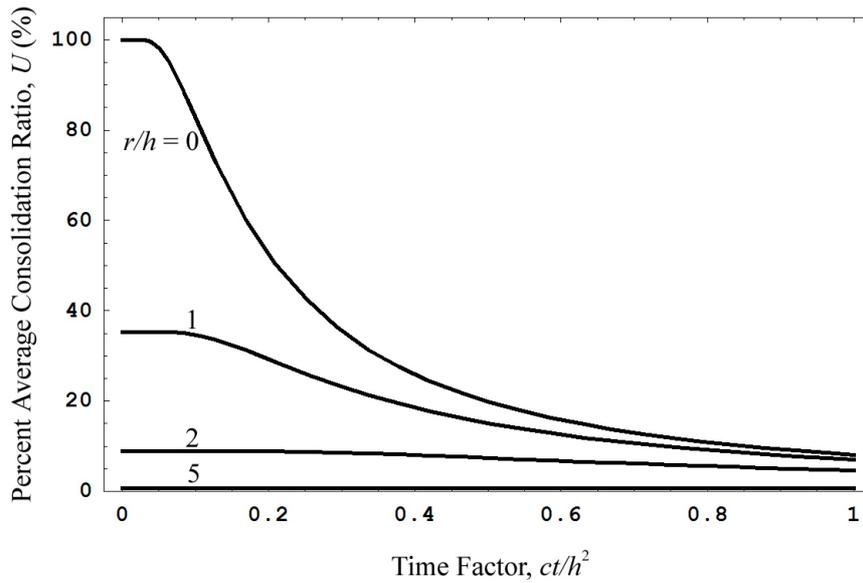


圖 2.3 瞬時抽水且地表模擬為透水情況時於 $r = 0$ 、 h 、 $2h$ 、 $5h$ 位置之平均壓密度 U

圖 2.4 與圖 2.5 均是考慮以穩定速率抽水且地表模擬為透水時所引致之壓密，圖 2.4 為依據式(2.52b)所示之最大地表沉陷 $u_{z \max} = u_z(0, 0, \infty)$ 與式(2.40b)，所繪製之無因次化壓密沉陷曲線；圖 2.5 則為依據式(2.52b)所示之最大地表沉陷 $u_{z \max} = u_z(0, 0, \infty)$ 與式(2.40a)，所繪製之無因次化地表水平位移曲線。由圖 2.5 得知，最大地表水平位移 $u_{r \max} = u_r(\sqrt{\phi}h, 0, \infty)$ ，約發生於 $t \rightarrow \infty$ 、 $r/h \approx 1.272$ 位置上，且 $u_{r \max}$ 約為 $u_{z \max}$ 之 30.0%。可見以穩定速率抽水時，所引致之地表水平位移相當顯著，不應忽略。此外，由式(2.52a)-(2.52b)得知，以穩定速率抽水所引致之最大地表水平位移與最大沉陷量均與抽水深度 h 無關。

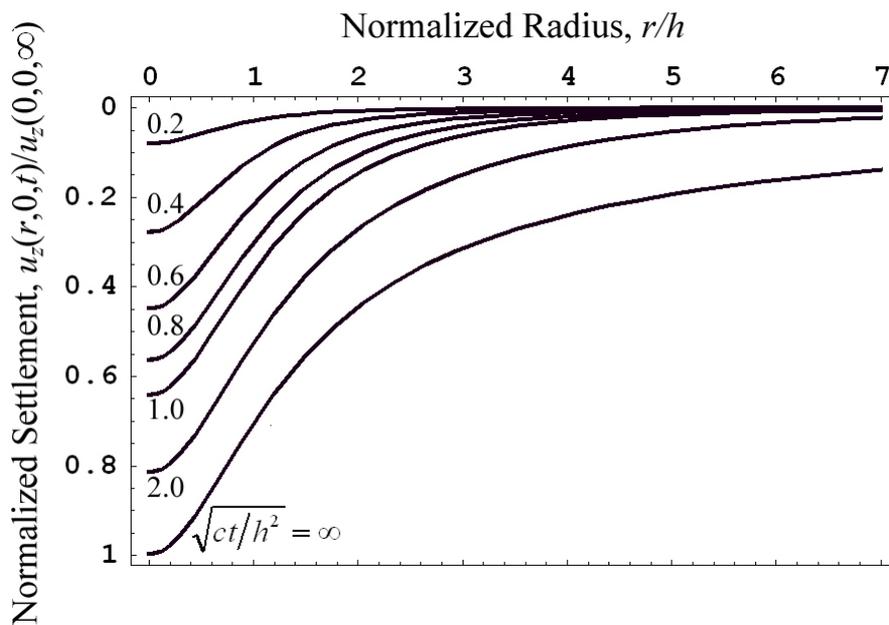


圖 2.4 以穩定速率抽水且地表模擬為透水情況時之無因次化壓密沉陷曲線

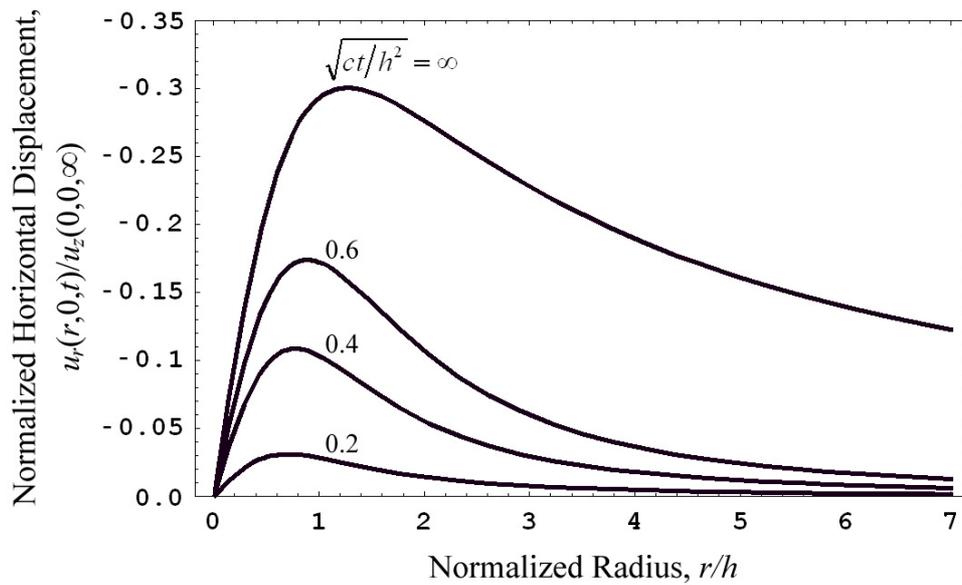


圖 2.5 以穩定速率抽水且地表模擬為透水情況時之無因次化地表水平位移曲線

圖 2.6 與圖 2.7 則是考慮瞬時抽水且地表模擬為透水時所引致之壓密，圖 2.6 為依據式(2.54b)所示之最大地表沉陷 $u_{z \max} = u_z(0, 0, 0^+)$ 與式(2.42b)，所繪製之無因次化壓密沉陷曲線；圖 2.7 則為依據式(2.54b)所示之最大地表沉陷 $u_{z \max} = u_z(0, 0, 0^+)$ 與式(2.42a)，所繪製之無因次化地表水平位移曲線。由圖 2.7 得知，最大地表水平位移 $u_{r \max} = u_r(h/\sqrt{2}, 0, 0^+)$ ，約發生於 $t \rightarrow 0^+$ 、 $r = h/\sqrt{2} \approx 0.707h$ 位置上，且 $u_{r \max}$ 約為 $u_{z \max}$ 之 38.5%。可見於瞬時抽水情況時，所引致之地表水平位移仍是相當顯著。

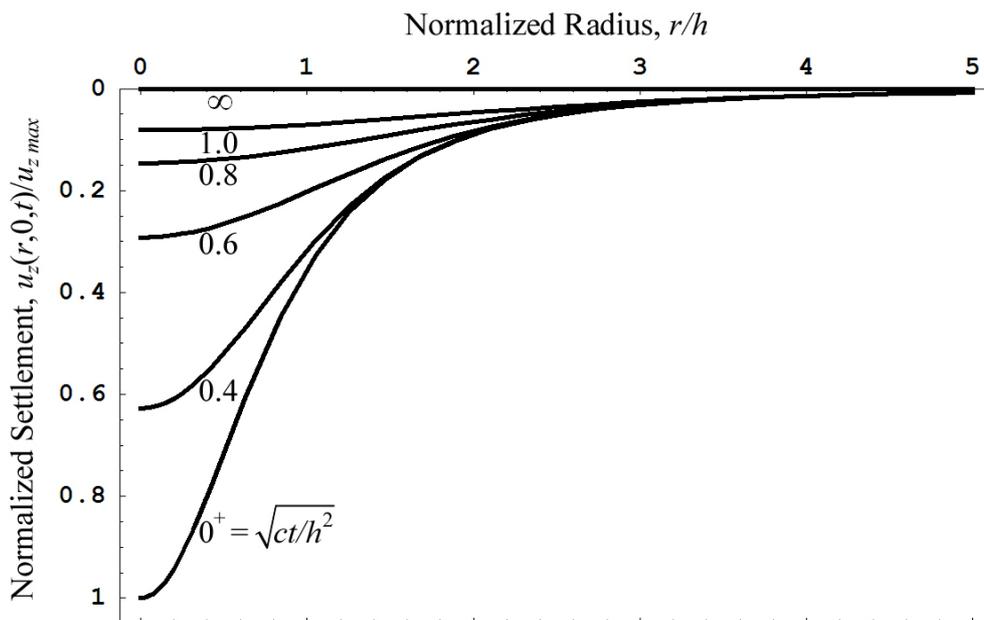


圖 2.6 瞬時抽水且地表模擬為透水情況時之無因次化壓密沉陷曲線

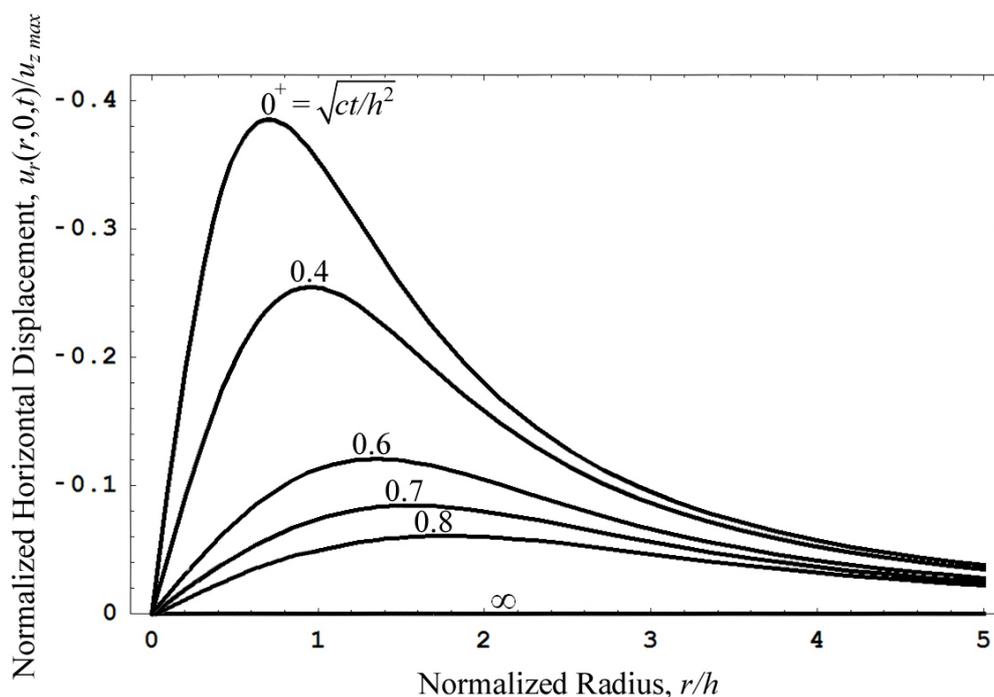


圖 2.7 瞬時抽水且地表模擬為透水情況時之無因次化地表水平位移曲線

為瞭解地表模擬為透水暨不透水時所引致之壓密沉陷量的差異，圖 2.8 是根據式(2.44b)與式(2.45b)並考慮含水層之柏松比為 0.25 時，探討以穩定速率抽水時透水暨不透水表面之無因次化壓密沉陷曲線。由圖 2.8 得知，地表模擬為不透水時，抽水所引致之壓密沉陷量明顯較大；當 $r/h \geq 1.5$ 時，地表模擬為不透水時抽水所引致之壓密沉陷量約是地表模擬為透水時之三倍。由此可知，地表滲流邊界條件對抽水所引起的壓密沉陷之影響相當顯著。

圖 2.9 與圖 2.10 則是根據式(2.40c)與式(2.41c)所繪製之穩定速率抽水所引起的地層超額孔隙水壓，式(2.40c)之地層超額孔隙水壓結果是模擬表面為完全透水情況，式(2.41c)之地層超額孔隙水壓結果則是模擬表面為完全不透水情況。由圖 2.9 與圖 2.10 之比較得知，當地表模擬為不透水時，抽水所引致之負的超額孔隙水壓（吸力）較大，因此所引起的地層有效應力較大，這也可應用以說明地表模擬為不透水情況時，其所引致之壓密沉陷會較大的原因。

茲考慮地層之基本參數如表 2.1 所示，在考慮自含水層中以穩定速率抽水，且單位時間內之抽水量 $Q_c = 30 \text{ l/s} (3 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s})$ ，則當地表模擬為透水情況時，抽水所引致之最大地表水平位移量與最大沉陷量分別為 1.42 cm 與 4.68 cm；另外，由式(2.52a)-(2.52b)得知，地表模擬為透水且以穩定速率抽水所引致之最大地表水平位移量與最大沉陷量均與抽水深度無關。然而，瞬時抽水所引致之最大地表水平位移量與最大沉陷量會則與抽水深度有關。若是考慮瞬時抽水情況且抽水深度 $h = 10 \text{ m}$ ，且在 $t \rightarrow 0^+$ 時之瞬時抽水量考慮為 $Q_0 = 50 \text{ l} (5 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s})$ ，則當地表模擬為透水時，抽水所引致之最大地表水平位移量與最大沉陷量分別為 0.44 cm 與 1.14 cm。

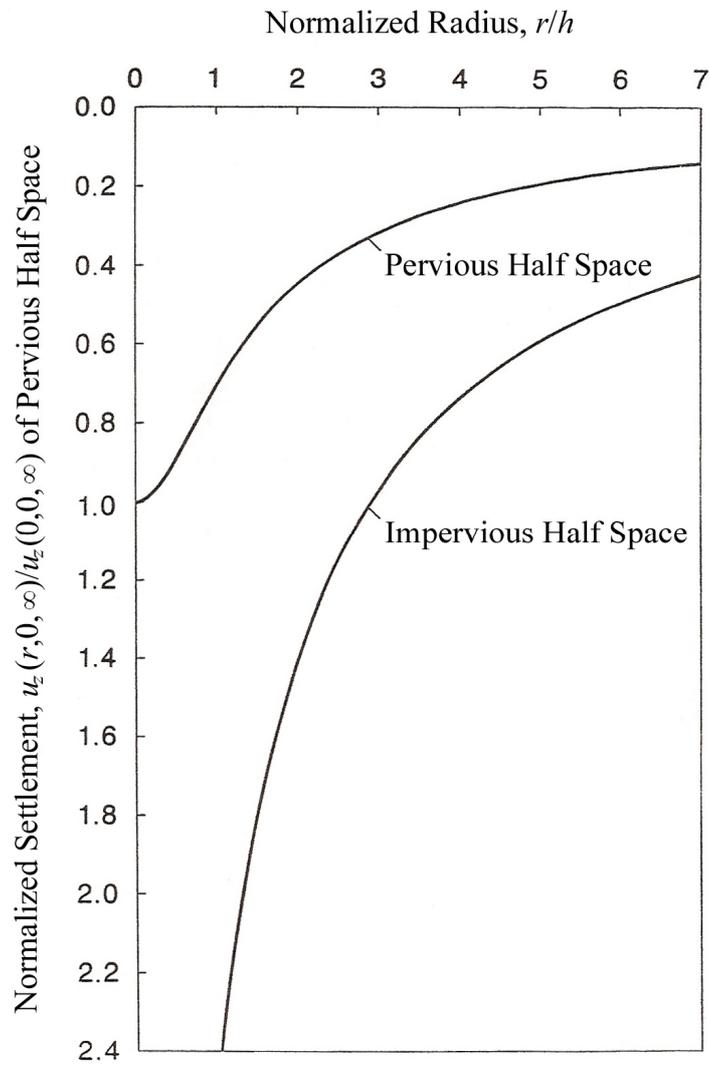


圖 2.8 穩定速率抽水時透水暨不透水地表面之無因次化壓密沉陷曲線

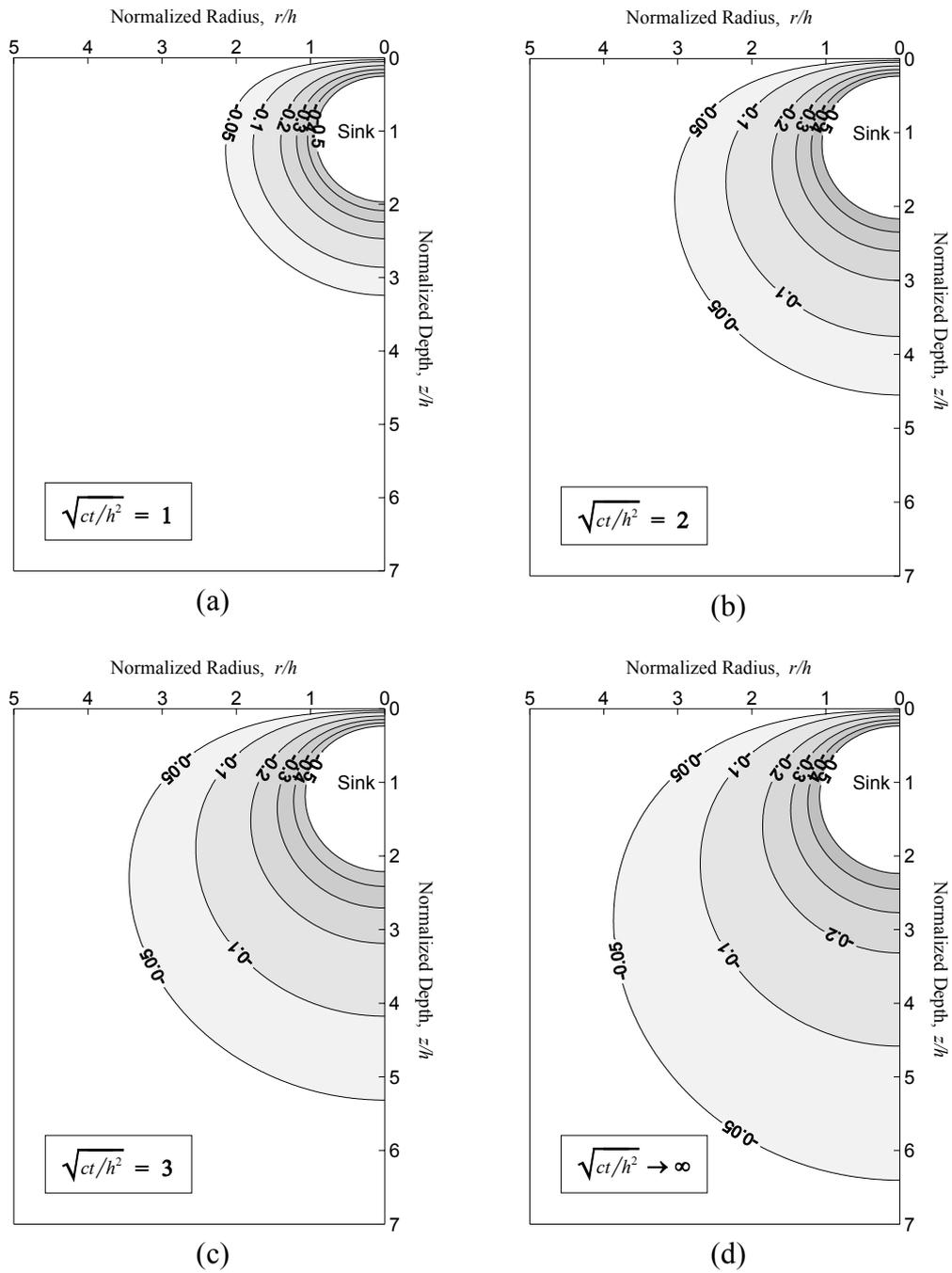


圖 2.9 穩定速率抽水且地表模擬為透水時之無因次化超額孔隙水壓分佈 $p(r,z,t)/[Q_c \gamma_w / (4\pi k h)]$

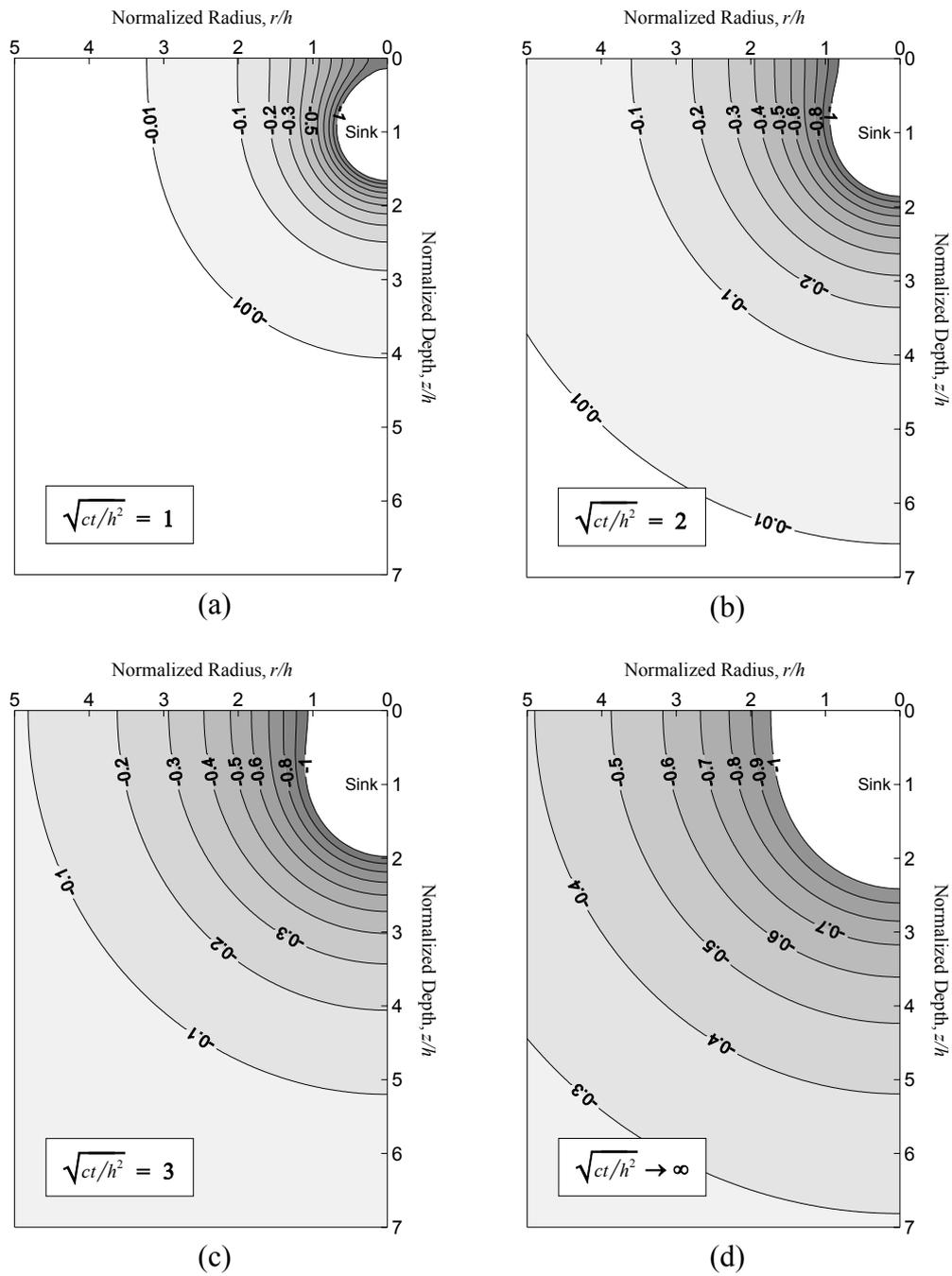


圖 2.10 穩定速率抽水且地表模擬為不透水時之無因次化超額孔隙水壓分佈 $p(r, z, t) / [Q_c \gamma_w / 4\pi k h]$

表 2.1 飽和含水層之基本參數

Parameter	Symbol	Value	Units
Shear Modulus ^[46]	G	20×10^6	N/m^2
Porosity ^[73]	n	0.3	—
Poisson's Ratio ^[46]	ν	0.3	—
Permeability ^[46]	k	1×10^{-5}	m/s
Compressibility of Water ^[74]	$1/\beta$	2.14×10^9	N/m^2
Unit Weight of Groundwater ^[46]	γ_w	9,810	N/m^3

2-5 結語

根據以上所述之研究成果得知，本研究是以單點抽水模擬單井抽水現象，並將含水層模擬為均質之線彈性多孔介質，其中地表之滲流邊界條件是分別模擬為透水暨不透水邊界，而抽水型態則分別考慮以穩定速率抽水及瞬時抽水兩種情況。本研究是引用 Laplace、Hankel 與 Fourier 積分轉換方法解析所建立之數學模式，分別研討出以上所述抽水條件下之閉合解。根據本研究之探討得知以下重要研究成果：

1. 在穩態抽水的考量下，隨著抽水延時的增加，地層中各點之超額孔隙水的負壓會逐漸增加，最後形成一穩態平衡。因孔隙水的負壓增加時，會形成地層有效應力的增加，而導致地層的壓密沉陷量逐漸變大。在瞬時抽水情況下，地層的壓密沉陷量在 $t \rightarrow 0^+$ 時會達到極大值，因本研究是將含水層模擬為線彈性之多孔介質，故瞬時抽水所引致之沉陷量會逐漸消失。
2. 在穩態抽水且地表模擬為透水條件的考量下，所引致之地表最大水平位移與垂直沉陷量均與抽水深度無關，且地表最大水平位移發生位置與黃金比例 ϕ ($\phi=1.618$) 有關。由數值結果之研討得知，地表最大水平位移 $u_{r, \max} = u_z(\sqrt{\phi}h, 0, \infty)$ ，約發生於 $t \rightarrow \infty$ 、 $r/h \approx 1.272$ 位置上，且 $u_{r, \max}$ 約為 $u_{z, \max}$ 之 30.0%。另外，在瞬時抽水條件的考慮下，其所引起之地表最大水平位移 $u_{r, \max} = u_z(h/\sqrt{2}, 0, 0^+)$ ，約發生於 $t \rightarrow 0^+$ 、 $r = h/\sqrt{2} \approx 0.707h$ 位置上，且 $u_{r, \max}$ 約為所對應之 $u_{z, \max}$ 之 38.5%。由此可知，抽水所引致之地表水平位移相當顯著，不宜忽略。
3. 地表模擬為不透水時，抽水所引致之壓密沉陷量明顯較大。在穩態抽水條件的考慮下，當 $r/h \geq 1.5$ 時，地表模擬為不透水時抽水所引致之壓密沉陷量約是地表模擬為透水時之三倍。由此可知，地表滲流邊界條件對抽水所引起的壓密沉陷之影響相當顯著。

參考文獻

1. Biot, M.A., "General Theory of Three-Dimensional Consolidation," *J. Appl. Phys.*, Vol. 12, No. 2, pp. 155-164 (1941).
2. Chen, J., "Time Domain Fundamental Solution to Biot's Complete Equations of Dynamic Poroelasticity. Part I: Two-Dimensional Solution," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 31, No. 10, pp. 1447-1490 (1994).
3. Chen, J., "Time Domain Fundamental Solution to Biot's Complete Equations of Dynamic Poroelasticity. Part II: Three-Dimensional Solution," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 31, No. 2, pp. 169-202 (1994).
4. Biot, M.A., "Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid," *J. Appl. Phys.*, Vol. 26, No. 2, pp. 182-185 (1955).
5. Cheng, A.H.-D. and J.A. Liggett, "Boundary Integral Equation Method for Linear Porous-Elasticity with Applications to Soil Consolidation," *Int. J. Numer. Methods Engng.*, Vol. 20, pp. 255-278 (1984).
6. Dominguez, J., "Boundary Element Approach for Dynamic Poroelastic Problems," *Int. J. Numer. Methods Engng.*, Vol. 35, pp. 307-324 (1992).
7. Biot, M.A., "Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid, I, Low Frequency Range," *J. Acoustic Soc. Am.*, Vol. 28, No. 2, pp. 168-178 (1956).
8. Kaynia, A.M. and P.K. Banerjee, "Fundamental Solutions of Biot's Equations of Dynamic Poroelasticity," *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 31, No. 5, pp. 817-830 (1993).
9. Senjuntichai, T. and R.K.N.D. Rajapakse, "Dynamic Green's Functions of Homogeneous Poroelastic Half-Space," *J. Engng. Mech.*, Vol. 120, No. 11, pp. 2381-2404 (1994).
10. Badmus, T., A.H.-D. Cheng and S. Grilli, "A Laplace-Transform-Based Three-Dimensional BEM for Poroelasticity," *Int. J. Numer. Anal. Methods Engng.*, Vol. 36, pp. 67-85 (1993).
11. Biot, M.A. and D.G. Willis, "The Elastic Coefficients of the Theory of Consolidation," *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, Vol. 79, pp. 594-601 (1957).

12. Rice, J.R. and M.P. Cleary, "Some Basic Stress Diffusion Solutions for Fluid-Saturated Elastic Porous Media with Compressible Constituents," *Rev. Geophys. Space Phys.*, Vol. 14, No. 2, pp. 227-241 (1976).
13. Skempton, A.W., "The Pore-Pressure Coefficients A and B," *Geotechnique*, Vol. 4, pp. 143-147 (1954).
14. Cheng, A.H.-D. and E. Detournay, "A Direct Boundary Element Method for Plane Strain Poroelasticity," *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 12, pp. 551-572 (1988).
15. Kurashige, M., "A Thermoelastic Theory of Fluid-Filled Porous Materials," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 25, No. 9, pp. 1039-1052 (1989).
16. Chen, C.T., J.C. Hu, C.Y. Lu, J.C. Lee and Y.C. Chan, "Thirty-year Land Elevation Change from Subsidence to Uplift Following the Termination of Groundwater Pumping and Its Geological Implications in the Metropolitan Taipei Basin, Northern Taiwan," *Engineering Geology*, Vol. 95, pp. 30-47 (2007).
17. 張胤隆, 「考量地層下陷之地下水管理模式建立與應用」, 博士論文, 國立交通大學土木工程學系, 共 144 頁 (2007)。
18. Hu, R.L., Z.Q. Yue, L.C. Wang and S.J. Wang, "Review on Current Status and Challenging Issues of Land Subsidence in China," *Engineering Geology*, Vol. 76, pp. 65-77 (2004).
19. 馬志強, 「漳州某基坑抽水引起地面沉降的初探」, 科技信息, 第 24 卷, 第 104-105 頁 (2007)。
20. 潘國營、鐘福平、姜衍祥、林雲, 「應用灰色關聯分析法識別導致地面沉降的抽水層位」, 河南理工大學學報, 第 25 卷, 第 1 期, 第 18-21 頁 (2006)。
21. Poland, J.F., *Guidebook to Studies of Land Subsidence Due to Ground-water Withdrawal*, The United Nations Educational Scientific and Cultural Organization, Unesco, Paris (1984).
22. Ovando-Shelley, E., A. Ossa and M.P. Romo, "The Sinking of Mexico City: Its Effects on Soil Properties and Seismic Response," *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 27, pp. 333-343 (2007).

23. Gonzalez-Moran, T., R. Rodriguez and S.A. Cortes, "The Basin of Mexico and its Metropolitan Area: Water Abstraction and Related Environmental Problems," *Journal of South American Earth Sciences*, Vol. 12, pp. 607-613 (1999).
24. Phien-wej, N., P.H. Giao and P. Nutalaya, "Land Subsidence in Bangkok, Thailand," *Engineering Geology*, Vol. 82, pp. 187-201 (2006).
25. Phien-wej, N., P.H. Giao and P. Nutalaya, "Field Experiment of Artificial Recharge Through a Well with Reference to Land Subsidence Control," *Engineering Geology*, Vol. 50, pp. 187-201 (1998).
26. Stiros, S.C., "Subsidence of the Thessaloniki (Northern Greece) Coastal Plain, 1960-1999," *Engineering Geology*, Vol. 61, pp. 243-256 (2001).
27. Psimoulis, P., M. Ghilardi, E. Fouache and S. Stiros, "Subsidence and Evolution of the Thessaloniki Plain, Greece, Based on Historical Leveling and GPS Data," *Engineering Geology*, Vol. 90, pp. 55-70 (2007).
28. 賴進松,「濱海地層下陷易淹水地區防護及管理策略之研究—子計畫：地層下陷易淹水區區域排水系統運作模擬分析(II)」, 國立臺灣大學水工試驗所, 國科會專題研究計畫 (2007/8/1~2008/7/31)。
29. 譚義績,「濱海地層下陷易淹水地區防護及管理策略之研究—總計畫暨子計畫：利用反向推估法推求地層下陷區地下水抽取量(II)」, 國立臺灣大學生物環境系統工程學系暨研究所, 國科會專題研究計畫 (2007/8/1~2008/7/31)。
30. 邱式鴻,「多時序三維空間資訊於地層下陷監測及分析—子計畫：以空載光達技術進行地層下陷監測之研究(I)」, 國立政治大學地政學系, 國科會專題研究計畫 (2007/8/1~2008/7/31)。
31. 陳良健,「多時序三維空間資訊於地層下陷監測及分析—總計畫暨子計畫：地層下陷區域三維空間資訊之建立及展現(I)」, 國立中央大學太空及遙測研究中心, 國科會專題研究計畫 (2007/8/1~2008/7/31)。
32. 陳景文,「雲林下陷區地層水文特性及減緩地層下陷之研究—子計畫四：雲林高鐵沿線下陷區土層壓縮性與重要結構物沉陷防治工法之研究」, 國立成功大學土木工程學系(所), 國科會專題研究計畫 (2007/8/1~2008/7/31)。
33. 曾義星,「多時序三維空間資訊於地層下陷監測及分析—子計畫：以歷史航測影像製作多時序數值地形模型於地層下陷監測之應用(I)」, 國立成功大學測量及空間資訊學系(所), 國科會專題研究計畫 (2007/8/1~2008/7/31)。

34. 徐百輝，「多時序三維空間資訊於地層下陷監測及分析—子計畫:多時序及多來源數值地形模型資料之比較分析及三維空間資訊在災害模擬之應用(I)」，國立成功大學測量及空間資訊學系（所），國科會專題研究計畫（2007/8/1~2008/7/31）。
35. 李振誥，「雲林下陷區地層水文特性及減緩地層下陷之研究—總計畫」，國立成功大學資源工程學系（所），國科會專題研究計畫（2007/8/1~2008/7/31）。
36. 徐國錦，「雲林下陷區地層水文特性及減緩地層下陷之研究—子計畫二：地層下陷區地下水流與土壤沉陷交互作用之研究」，國立成功大學資源工程學系（所），國科會專題研究計畫（2007/8/1~2008/7/31）。
37. 李振誥，「雲林下陷區地層水文特性及減緩地層下陷之研究—子計畫五：雲林地陷區地表水與地下水聯合管理運用及減緩策略之研究」，國立成功大學資源工程學系（所），國科會專題研究計畫（2007/8/1~2008/7/31）。
38. 陳國華，「整合台灣西南部平原地區水準及 GPS 監測資料進行地層下陷時序性變化與預測模式建立之研究」，國立臺北大學不動產與城鄉環境學系，國科會專題研究計畫（2007/8/1~2008/7/31）。
39. 蕭再安，「濱海地層下陷易淹水地區防護及管理策略之研究—子計畫：海岸災害防治決策支援系統之建立(III)」，國立臺灣海洋大學河海工程學系暨研究所，國科會專題研究計畫（2007/8/1~2008/7/31）。
40. 陳浦淮，「多時序三維空間資訊於地層下陷監測及分析—子計畫：以雷達影像(SAR)進行地層下陷與災害環境監測之研究(I)」，開南大學資訊管理學系，國科會專題研究計畫（2007/8/1~2008/7/31）。
41. 謝弘哲，「應用進化演算法於地層下陷區海水入侵機制與防治策略之研究」，致遠管理學院營建科技與空間資訊學系，國科會專題研究計畫（2007/8/1~2008/7/31）。
42. 淡江大學，「地層下陷防治資訊網」，<http://www.water.tku.edu.tw/sub91/>（2009.3.31 瀏覽）。
43. 經濟部水利署、工業技術研究院，「地層下陷資訊管理系統」，<http://www.subsidence.org.tw/>（2009.3.31 瀏覽）。
44. 經濟部水利署、國立成功大學，「地層下陷防治服務團」，<http://www.lsprc.ncku.edu.tw/>（2009.3.31 瀏覽）。

45. Terzaghi, K., *Theoretical Soil Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, N.Y., pp. 256-296 (1943).
46. Booker, J.R. and J.P. Carter, "Analysis of a Point Sink Embedded in a Porous Elastic Half Space," *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 10, No. 2, pp. 137-150 (1986).
47. Booker, J.R. and J.P. Carter, "Long Term Subsidence Due to Fluid Extraction from a Saturated, Anisotropic, Elastic Soil Mass," *Q. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 39, Pt. 1, pp. 85-97 (1986).
48. Booker, J.R. and J.P. Carter, "Elastic Consolidation Around a Point Sink Embedded in a Half-Space with Anisotropic Permeability," *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 11, No. 1, pp. 61-77 (1987).
49. Booker, J.R. and J.P. Carter, "Withdrawal of a Compressible Pore Fluid from a Point Sink in an Isotropic Elastic Half Space with Anisotropic Permeability," *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 23, No. 3, pp. 369-385 (1987).
50. Tarn, J.-Q. and C.-C. Lu, "Analysis of Subsidence Due to a Point Sink in an Anisotropic Porous Elastic Half Space," *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 15, No. 8, pp. 573-592 (1991).
51. Lu, J. C.-C. and F.-T. Lin, "The Transient Ground Surface Displacements Due to a Point Sink/Heat Source in an Elastic Half-Space," *Geotechnical Special Publication No. 148, GeoShanghai International Conference 2006, ASCE, Shanghai, China*, pp. 210-218 (2006).
52. Lu, J. C.-C. and F.-T. Lin, "Analysis of Transient Ground Surface Displacements Due to a Point Sink in a Pervious/Impervious Poroelastic Half-Space," *Proceedings of the 34th Congress of International Association of Hydrogeologists*, Beijing, China, p. 353 (2006).
53. Lu, John C.-C. and Feng-Tsai Lin, "Analysis of the Transient Ground Surface Displacements Subject to a Point Sink in a Poroelastic Half Space," *Chung Hua Journal of Science and Engineering*, Vol. 5, No. 1, pp. 77-86 (2007).
54. Lu, John C.-C. and Feng-Tsai Lin, "Elastic Consolidation for a Transversely Isotropic Half Space Subjected to a Point Sink," *Proceedings of ASME Applied*

- Mechanics and Materials Conference*, Austin, Texas, U.S.A., Abstract in CD (2007).
55. Lu, J. C.-C., and Lin, F.-T., "Modelling of Consolidation Settlement Subjected to a Point Sink in an Isotropic Porous Elastic Half Space," *Proceedings of the 17th IASTED International Conference on Applied Simulation and Modelling*, Corfu, Greece, Jun. 23-25, pp. 141-146 (2008).
56. Lin, Feng-Tsai and John C.-C. Lu, "Analysis of Elastic Consolidation Due to a Point Sink in a Pervious/Impervious Poroelastic Half Space," *Chung Hua Journal of Science and Engineering*, Vol. 6, No. 1, pp. 27-40 (2008).
57. Chen, G.J., "Analysis of Pumping in Multilayered and Poroelastic Half Space," *Computers and Geotechnics*, Vol. 30, No.1, pp. 1-26 (2002).
58. Chen, G.J., "Steady-state Solutions of Multilayered and Cross-anisotropic Poroelastic Half-space Due to a Point Sink," *International Journal of Geomechanics*, Vol. 5, No. 1, pp. 45-57 (2005).
59. Worsak, K.N. and K.T. Chau, "Point Sink Fundamental Solutions for Subsidence Prediction," *J. Engng. Mech.*, ASCE, Vol. 116, No. 5, pp. 1176-1182 (1990).
60. Burbey, T.J., S.M. Warner, G. Blewitt, J.W. Bell and E. Hill, "Three-dimensional Deformation and Strain Induced by Municipal Pumping, Part 1: Analysis of Field Data," *Journal of Hydrology*, Vol. 319, No. 1-4, pp. 123-142 (2006).
61. Burbey, T.J., "Three-dimensional Deformation and Strain Induced by Municipal Pumping, Part 2: Numerical Analysis," *Journal of Hydrology*, Vol. 330, pp. 422-434 (2006).
62. Kim, J.M. and R.R. Parizek, "Three-dimensional Finite Element Modelling for Consolidation Due to Groundwater Withdrawal in a Desaturating Anisotropic Aquifer System," *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 23, No. 6, pp. 549-571 (1999).
63. Bawden, G.W., W. Thatcher, R.S. Stein, K.W. Hudnut and G. Peltzer, "Tectonic Contraction Across Los Angeles After Removal of Groundwater Pumping Effects," *Nature*, Vol. 412, No. 6849, pp. 812-815 (2001).
64. Hou, C.S., J.C. Hu, L.C. Shen, J.S. Wang, C.L. Chen, T.C. Lai, C. Huang, Y.R. Yang, R.F. Chen, Y.G. Chen and J. Angelier, "Estimation of Subsidence Using

- GPS Measurements, and Related Hazard: the Pingtung Plain, Southwestern Taiwan,” *Comptes Rendus Geoscience*, Vol. 337, No. 13, pp. 1184-1193 (2005).
65. Gambolati, G., M. Putti and P. Teatini, “Coupled and Uncoupled Poroelastic Solutions to Land Subsidence Due to Groundwater Withdrawal,” *Proceedings of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 1, pp. 483-486 (1996).
66. Yeh, H.-D., R.-H. Lu, and G.-T. Yeh, “Finite Element Modelling for Land Displacements Due to Pumping,” *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 20, pp. 79-99 (1996).
67. Bear, J. and M.Y. Corapcioglu, “Mathematical Model for Regional Land Subsidence Due to Pumping, 2. Integrated Aquifer Subsidence Equations for Vertical and Horizontal Displacements,” *Water Resour. Res.*, Vol. 17, pp. 947-958 (1981).
68. Bear, J. and M.Y. Corapcioglu, *Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media*, NATO ASI Series, Martinus Nijhoff Publishers (1984).
69. Spiegel, M.R., *Theory and Problems of Laplace Transforms*, Schaum Publishing Co., New York, N.Y., 261 p (1965).
70. Sneddon, I.N., *Fourier Transforms*, New York, McGraw-Hill, pp. 48-70 (1951).
71. Erdelyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F.G. Tricomi, *Tables of integral transforms*, New York, McGraw-Hill (1954).
72. Dunlap, R.A., *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, Singapore, River Edge, NJ, World Scientific (1997).
73. Slough, K.J., E.A. Sudicky and P.A. Forsyth, “Numerical Simulation of Multiphase Flow and Phase Partitioning in Discretely Fractured Geologic Media,” *Journal of Contaminant Hydrology*, Vol. 40, No. 2, pp. 107-136 (1999).
74. Vardoulakis, I. and D.E. Beskos, “Dynamic Behavior of Nearly Saturated Porous Media,” *Mechanics of Materials*, Vol. 5, pp. 87-108 (1986).

誌 謝

本計畫之各項研究成果是在國科會計畫 NSC97-2815-C-216-003-E 與中華大學配合補助案 CHU97-2815-C-216-003-E 之補助下所完成，特此申謝。

符號說明

A, N, S	Material constants of the isotropic porous medium (Pa, Pa, Pa)
B	Skempton pore pressure coefficient (Dimensionless)
c	Parameter, $c = k_z/n\beta\gamma_w$ or $c = k/n\beta\gamma_w$ (m^2/s)
$erf(x)$	Error function
$erfc(x)$	Complementary Error function
f_i	Body forces of the porous medium (Pa/m)
G	Shear modulus of the isotropic porous medium (Pa)
h	Pumping depth (m)
$\mathbf{i}_r/\mathbf{i}_z$	Unit vector parallel to the radial/vertical direction (Dimensionless)
$I_\nu(x)$	Modified Bessel function of the first kind of order ν (Dimensionless)
$J_\nu(x)$	First kind of the Bessel function of order ν (Dimensionless)
k	Permeability of the isotropic porous medium (m/s)
k_r	Horizontal permeability of the porous medium (m/s)
k_z	Vertical permeability of the porous medium (m/s)
M	Material constant of the isotropic porous medium (Pa)
n	Porosity of the porous medium (Dimensionless)
p	Excess pore fluid pressure (Pa)
P	Laplace transform of p
\tilde{P}	Hankel and Laplace transforms of p
\tilde{P}^*	Fourier, Hankel and Laplace transforms of p
q	Rate of water extracted from the ground per unit volume (s^{-1})
Q	Laplace transform of q ; Material constant of the isotropic porous medium (Pa)
Q_0	Amount of groundwater due to impulsive pumping (m^3)
Q_c	Strength of the point sink of constant rate (m^3/s)
\tilde{Q}	Hankel and Laplace transforms of q
\tilde{Q}^*	Fourier, Hankel and Laplace transforms of q
(r, θ, z)	Cylindrical coordinates system (m, radian, m)
R	Material constant of the isotropic porous medium (Pa)
s	Laplace transform parameter (s^{-1})
t	Time (s)
$u(t)$	Heaviside unit step function (Dimensionless)
u_i	Displacements of the porous medium (m)

u_r/u_z	Radial/axial displacement of the porous medium (m)
U_r/U_z	Laplace transform of u_r/u_z
\tilde{U}_r/\tilde{U}_z	Hankel and Laplace transforms of u_r/u_z
$\tilde{U}_r^*/\tilde{U}_z^*$	Fourier, Hankel and Laplace transforms of u_r/u_z
v_i	Velocity of fluid (m/s)
v_w/v_s	Velocity of fluid/solid (m/s)
α	Material constant of the isotropic porous medium (Pa)
β	Compressibility of pore water (Pa^{-1})
γ_f	Unit weight of pore fluid (N/m^3)
γ_w	Unit weight of pore water (N/m^3)
$\delta(x)$	Dirac delta function (m^{-1})
δ_{ij}	Kronecker delta (Dimensionless)
ε	Volume strain of the porous medium (Dimensionless)
ζ	Volume increment per unit volume of porous medium (Dimensionless)
η	Parameter, $\eta = (1-\nu)/(1-2\nu)$ (Dimensionless)
θ	Volume increment per unit volume of porous medium (Dimensionless)
λ	Lame constant of the isotropic porous medium (Pa)
μ	Shear modulus of the isotropic porous medium (Pa)
ν	Poisson's ratio for the isotropic porous medium (Dimensionless)
ν_u	Undrained Poisson's ratio for the isotropic porous medium (Dimensionless)
ξ	Hankel transform parameter (m^{-1})
τ_{ij}	Total stress components of the porous medium (Pa)
ω	Fourier transform parameter (m^{-1})